

Cohérence temporelle de la vibration lumineuse

October 22, 2001

Contenu

1	Interférences à deux ondes en lumière polychromatique	2
1.1	Nécessité d'une description statistique	2
1.2	Figure d'interférences d'une source incohérente	4
1.3	Exemples de sources quasi-monochromatiques	5
1.4	Franges d'interférences en lumière blanche	8
2	Notions sur les processus aléatoires	10
2.1	Processus aléatoire réel stationnaire et ergodique	10
2.2	Processus aléatoire complexe	11
2.3	Densité spectrale de puissance	12
2.4	Théorème de Wiener–Kintchine	15
2.5	Corrélations d'amplitude et interférométrie à deux ondes	16
3	Modèle de source incohérente	17
3.1	Description du modèle et intensité émise	17
3.2	Interprétation : champ gaussien fluctuant	19
3.3	Retrouvons le modèle des trains d'onde	21
3.4	Corrélations d'intensité	22
3.4.1	Définition et principe de la mesure	22
3.4.2	Cas du champ gaussien	22
3.4.3	L'expérience de Hanbury Brown et Twiss	24

1 Interférences à deux ondes en lumière polychromatique

1.1 Nécessité d'une description statistique

Nous avons envisagé dans le chapitre précédent les interférences idéales obtenues entre deux vibrations lumineuses, de même fréquence ω . Nous avons d'autre part supposé que ces deux vibrations conservaient au cours du temps le même déphasage relatif. Nous allons étendre notre calcul des interférences au cas de la lumière non-monochromatique. Par application du théorème de Fourier, la vibration lumineuse peut alors se décomposer en une somme de composantes monochromatiques. Ecrivons ainsi la vibration au point M d'observation sous la forme suivante :

$$\mathcal{S}(t) = \sum_l a_l e^{-i\omega_l t} \quad (1)$$

composée d'un grand nombre de fréquences discrètes ω_l que nous supposerons être équi-réparties sur une largeur $\Delta\omega$ autour d'une fréquence centrale ω_0 . Notons Ω_d le grain de discrétisation séparant deux fréquences ω_l et ω_{l+1} successives. Si nous supposons enfin que $\Omega_d \ll \Delta\omega$ et que les termes d'amplitude a_l varient lentement à l'échelle du grain Ω_d , l'expression (1) peut être représentée par passage à la limite continue :

$$\mathcal{S}(t) = \int \frac{d\omega}{\Omega_d} a(\omega) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

où le facteur $1/\Omega_d$ est équivalent à une densité d'états de la répartition des fréquences lumineuses. Pour continuer le calcul de façon élémentaire, nous supposerons que $a(\omega) = \text{Cte} = a_0$, de sorte que :

$$\mathcal{S}(t) = i \frac{a_0}{\Omega_d} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} d\omega e^{-i\omega t} \quad (3)$$

Cette intégrale se calcule immédiatement, et la vibration lumineuse s'écrit :

$$\mathcal{S}(t) = \frac{a_0}{\Omega_d} \frac{\Delta\omega}{2} \left[\frac{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}{\frac{\Delta\omega t}{2}} \right] e^{-i\omega_0 t} \quad (4)$$

Compte tenu de la forme bien connue de la fonction sinus cardinal correspondant au terme en crochet, nous trouvons en fait une impulsion lumineuse dont la durée caractéristique est de l'ordre de $1/\Delta\omega$! Puisqu'un tel comportement temporel n'est évidemment pas celui que nous rencontrons habituellement, nous devons en déduire que l'expression initiale (1) que nous avons choisie n'est pas appropriée pour la description de la lumière émise par une source classique telle qu'une lampe à décharge constituée d'un grand nombre d'atomes émetteurs ¹. Une description réaliste de la vibration lumineuse doit en fait être de nature *statistique*. En effet, les fréquences lumineuses sont tellement grandes, qu'il est généralement impossible (même pour une source laser) que la phase reste contrôlée à l'échelle du temps d'observation par le détecteur qui ne peut être inférieur à 0.1 ns, et qui dure donc au moins 10^4 périodes lumineuses.

Cette approche statistique, que nous allons maintenant mettre en œuvre, va nous permettre de donner une description correcte de la lumière. Un grand nombre de propriétés de la vibration lumineuse, souvent admises sans réelle justification, reposent en fait sur cette nature aléatoire de la vibration, considérée comme un champ électromagnétique classique.

¹ A l'inverse, ce développement correspond au régime permanent d'une source laser impulsionnelle, dans laquelle les différentes composantes spectrales ω_l sont mises en phases les unes par rapport aux autres par un mécanisme non-linéaire appelé "blocage de modes". Pour en donner un ordre de grandeur, une impulsion laser de quelques picosecondes correspond à la superposition de vibrations cohérentes sur une largeur spectrale de quelques 10^{11} Hz.

Nous commençons par remplacer l'expression (1) par :

$$\mathcal{S}(t) = \sum_l a_l(t) e^{-i\omega_l t} e^{i\varphi_l(t)} \quad (5)$$

où les termes fluctuants de phase $\varphi_l(t)$ et d'amplitude $a_l(t)$, supposés dépendre du temps de façon aléatoire sont séparés de la partie oscillante à la fréquence ω_0 ². Le processus d'émission par la source est néanmoins stationnaire au cours du temps, et nous pouvons également admettre qu'il y a *ergodisme*. Si nous utilisons un photodétecteur qui effectue une moyenne temporelle sur un temps d'intégration suffisamment long par rapport au temps d'évolution de la partie fluctuante de la vibration et si nous négligeons l'évolution lente de l'amplitude réelle $a_l(t)$, nous pouvons alors remplacer les moyennes temporelles $\overline{\dots}$ par une moyenne $\langle \dots \rangle$ qui est évaluée au sens de Gibbs sur un ensemble statistique. Insistons sur le fait que cette procédure reste valable tant que le détecteur est suffisamment lent pour lisser les variations de phase. Dans le cas contraire dont nous donnerons un exemple dans la suite, il est nécessaire de revenir au suivi temporel de l'évolution des termes de phase.

□ Intensité totale émise

Calculons l'intensité émise par une telle source, que nous avons définie au chapitre précédent par la relation :

$$I = \overline{\mathcal{S}\mathcal{S}^*} \quad (6)$$

qui correspond à l'intégration sur un temps caractéristique T_{det} qui dépend du détecteur utilisé pour l'expérience :

$$I = \frac{1}{T_{\text{det}}} \int_t^{t+T_{\text{det}}} dt |\mathcal{S}(t)|^2 \quad (7)$$

Puisque les phases $\varphi_l(t)$ vont fluctuer de façon totalement incontrôlée, nous pouvons les représenter par une variable aléatoire ϕ_l qui possède une valeur bien déterminée que nous supposons être équi-répartie entre 0 et 2π . L'hypothèse d'ergodicité nous permet ainsi de remplacer la somme temporelle dans (6) par une moyenne effectuée sur l'ensemble statistique des ϕ_l :

$$\begin{aligned} I &= \langle \mathcal{S}\mathcal{S}^* \rangle_\phi \\ &= \left\langle \sum_l \sum_m a_l a_m e^{i(\phi_l - \phi_m)} e^{-i(\omega_l - \omega_m)t} \right\rangle_\phi \end{aligned} \quad (8)$$

Nous supposons que dans le cas de l'émission d'une source classique, les variables ϕ_l ne possèdent aucune corrélation entre elles :

$$\langle \phi_l \rangle_\phi = \langle \phi_m \rangle_\phi = 0 \quad \text{et} \quad \langle e^{i(\phi_l - \phi_m)} \rangle_\phi = \delta_{lm} \quad (9)$$

où δ_{lm} représente le symbole de Kronecker³. Nous obtenons finalement que l'intensité lumineuse totale est simplement la somme des intensités rayonnées par chaque élément spectral "l" de la décomposition :

$$I = \sum_l \sum_m \delta_{lm} a_l a_m = \sum_l I_l \quad (10)$$

Puisque les champs correspondant à ces différentes sources n'interfèrent pas entre eux, la source peut être qualifiée comme **incohérente**.

²Dans le cas d'une lampe, l'émission des atomes se fait de manière spontanée. Il n'existe donc pas de relation de phase relative bien déterminée entre les champs rayonnés par deux dipôles pris au hasard.

³Notons que cette dernière propriété, qui peut nous sembler tout-à-fait naturelle, peut être démontrée de manière rigoureuse en fonction des lois de probabilité (voir Annexe A_{III}).

1.2 Figure d'interférences d'une source incohérente

L'utilisation d'une telle source incohérente va affecter le contraste des franges d'interférences pouvant être obtenues avec la vibration émise. Afin de ne pas compliquer l'étude par la prise en compte des dimensions spatiales, nous supposons qu'il s'agit d'une source lumineuse S ponctuelle, éclairant deux trous d'Young T_1 et T_2 ⁴. Les vibrations lumineuses $\mathcal{S}_1(M)$ et $\mathcal{S}_2(M)$ qui arrivent au point M d'observation en passant par T_1 et T_2 , vont s'écrire sous la forme d'une sommation discrète :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1(M) &= \sum_l a_l(t) e^{-i\omega_l t} e^{i\varphi_l(t)} e^{ik_l[ST_1M]} \\ \mathcal{S}_2(M) &= \sum_l a_l(t) e^{-i\omega_l t} e^{i\varphi_l(t)} e^{ik_l[ST_2M]}\end{aligned}\quad (11)$$

Un calcul identique à celui que nous d'effectuer nous conduit à une intensité totale au point M , fonction de la différence de marche $\Delta(M) = [ST_2M] - [ST_1M]$:

$$I(M) = \sum_l I_l [1 + \cos k\Delta(M)] \quad (12)$$

Le fait que la source soit incohérente se traduit maintenant par la simple superposition des figures d'interférences correspondant à chaque fréquence ω_l . Nous avons ainsi justifié la règle énoncée dans les cours élémentaires d'optique, suivant laquelle les phénomènes d'interférences en lumière polychromatique peuvent se calculer en ajoutant les figures d'interférences calculées séparément pour chaque composante monochromatique.

Nous allons réexprimer ce résultat pour montrer un résultat important, qu'il convient de garder en mémoire pour la suite de ce cours. Les opticiens ont coutume d'exprimer les fréquences d'émission en terme de *nombre d'onde* σ , usuellement donné en cm^{-1} :

$$\sigma \text{ (en cm}^{-1}\text{)} = \frac{1}{\lambda \text{ (en cm)}}$$

Dans la cas d'une distribution *continue* de fréquences, caractérisée par une densité spectrale d'intensité $\mathcal{I}(\sigma)$, nous pouvons généraliser cette sommation discrète par passage à la limite continue. Nous obtenons ainsi :

$$I(\Delta) = \int_0^{+\infty} d\sigma \mathcal{I}(\sigma) [1 + \cos 2\pi\sigma\Delta] \quad (13)$$

soit, en faisant apparaître l'intensité totale :

$$I_{\text{tot}} = \int_0^{+\infty} d\sigma \mathcal{I}(\sigma) \quad (14)$$

$$I(\Delta) = I_{\text{tot}} \left[1 + \frac{\int_0^{+\infty} d\sigma \mathcal{I}(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta}{I_{\text{tot}}} \right] \quad (15)$$

On pose :

$$\hat{I}(\Delta) = \int_0^{+\infty} d\sigma \mathcal{I}(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta \quad (16)$$

⁴A la place de ces deux trous d'Young, nous pourrions tout aussi bien considérer deux sources secondaires S_1 et S_2 , images réelles ou virtuelles de la source S données par le dispositif interférométrique.

qu'on a coutume d'appeler *interférogramme*, et qui peut également s'écrire en changeant σ en $-\sigma$:

$$\hat{I}(\Delta) = \int_{-\infty}^0 d\sigma \mathcal{I}(-\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta$$

de sorte que finalement :

$$\hat{I}(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \mathcal{I}_p(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \mathcal{I}_p(\sigma) e^{i2\pi\sigma\Delta}$$

où nous avons introduit la fonction paire qui symétrise le spectre de la source du côtés des fréquences σ négatives :

$$\mathcal{I}_p(\sigma) = \frac{1}{2} [\mathcal{I}(\sigma) + \mathcal{I}(-\sigma)] \quad (17)$$

qui correspond au spectre symétrisé de la densité spectrale d'intensité $\mathcal{I}(\sigma)$, dont le support physique est borné entre 0 et $+\infty$. L'interférogramme $\hat{I}(\Delta)$ est donc la transformée de Fourier (TF) de $\mathcal{I}_p(\sigma)$. Compte tenu des propriétés de cette transformation, nous avons également :

$$\mathcal{I}_p(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \hat{I}(\Delta) e^{-i2\pi\sigma\Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta \hat{I}(\Delta) \cos 2\pi\sigma\Delta$$

soit finalement :

$$\hat{I}(\Delta) = \int_{+\infty}^{+\infty} d\sigma \mathcal{I}_p(\sigma) \cos 2\pi\sigma\Delta \leftrightarrow \mathcal{I}_p(\sigma) = \int_{+\infty}^{+\infty} d\Delta \hat{I}(\Delta) \cos 2\pi\sigma\Delta \quad (18)$$

Les phénomènes observables en interférométrie à deux ondes qui mettent en jeu des sources polychromatiques, peuvent donc s'interpréter simplement à partir de la seule connaissance de la densité spectrale $\mathcal{I}(\sigma)$ du rayonnement émis. Cette fonction peut être déterminée de façon indépendante grâce à son étude par un spectromètre, à la résolution de l'appareil près. Notons que de manière réciproque, l'acquisition de l'interférogramme $\hat{I}(\Delta)$ et le calcul de sa TF permettent de retrouver la densité spectrale de la source. Nous voyons le principe de la spectrométrie par transformée de Fourier, qui joue un rôle très important dans les problèmes d'analyse spectrale et en particulier dans le domaine infrarouge. L'interférométrie permet également de valider les modèles qu'il est possible d'élaborer pour représenter la vibration lumineuse. Nous allons commencer par l'étude de quelques cas particuliers pour illustrer le lien entre densité spectrale et figure d'interférences à deux ondes.

1.3 Exemples de sources quasi-monochromatiques

On rencontre souvent des sources quasi-monochromatiques, dont le spectre est limité à une bande de fréquences étroite, de largeur caractéristique $\Delta\sigma$ autour d'une fréquence centrale σ_0 . Nous allons en donner quelques cas particuliers, pour lesquels nous pourrions ensuite calculer l'interférogramme.

□ Densité spectrale rectangulaire

Considérons la répartition d'intensité correspondant à un créneau de largeur $\Delta\sigma$, centré sur

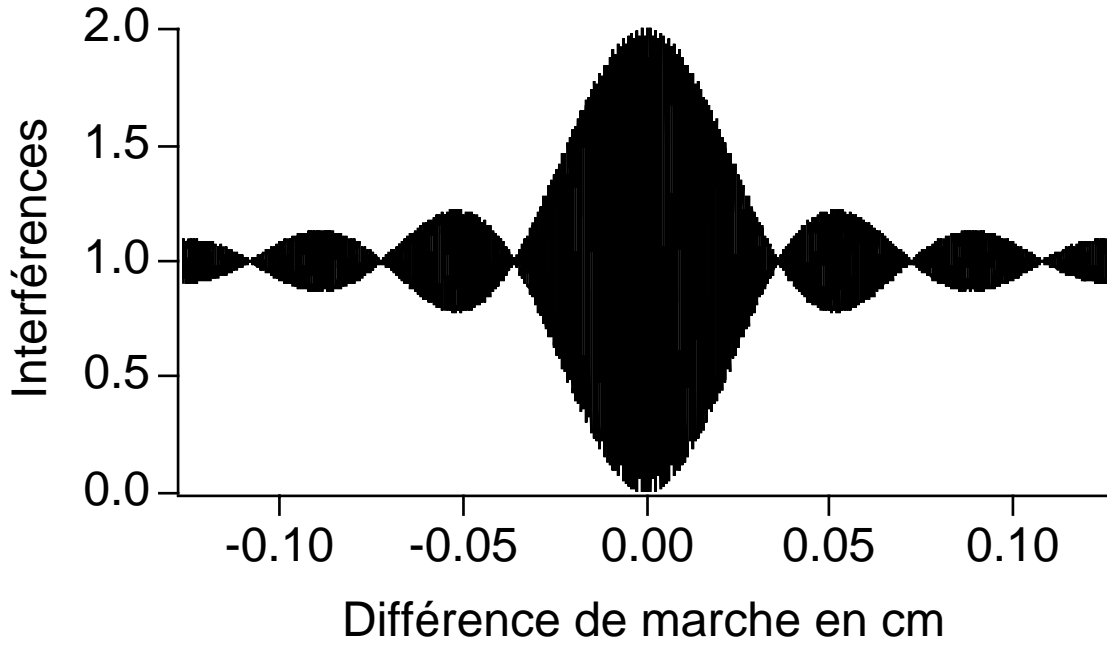


Figure 1: Figure d'interférences obtenue avec une source quasi-monochromatique, centrée sur $\lambda_0 = 600$ nm et dont la densité spectrale a une forme rectangulaire sur une largeur $\Delta\lambda = 1$ nm. Les franges d'interférences sont modulées par un facteur de contraste, qui varie en sinus cardinal en fonction de la différence de marche Δ .

σ_0 ⁵ :

$$\mathcal{I}(\sigma) = \begin{cases} \mathcal{I}_0 & \text{si } |\sigma - \sigma_0| \leq \Delta\sigma/2 \\ 0 & \text{si } |\sigma - \sigma_0| > \Delta\sigma/2 \end{cases} \quad (19)$$

Nous avons alors :

$$\hat{I}(\Delta) = \mathcal{I}_0 \Delta\sigma \frac{\sin \pi \Delta\sigma \Delta}{\pi \Delta\sigma \Delta} \cos 2\pi\sigma_0 \Delta$$

qui correspond à une figure d'interférences :

$$I(\Delta) = \mathcal{I}_0 \Delta\sigma \left[1 + \frac{\sin \pi \Delta\sigma \Delta}{\pi \Delta\sigma \Delta} \cos 2\pi\sigma_0 \Delta \right]$$

Comme représenté sur la figure 1, le contraste des franges d'interférences est égal à 1 pour $\Delta = 0$, puis décroît pour s'annuler une première fois en $\Delta = 1/\Delta\sigma$.

□ Densité spectrale gaussienne

Considérons une répartition d'intensité donnée par une gaussienne :

$$\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}_0 \exp -\pi \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\Delta\sigma^2} \quad (20)$$

Compte tenu du fait que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne reste une gaussienne, la figure d'interférences est donnée par (figure 2) :

$$\hat{I}(\Delta) = \mathcal{I}_0 \Delta\sigma e^{-\pi(\Delta\Delta\sigma)^2} \cos 2\pi\sigma_0 \Delta$$

⁵Une telle source peut par exemple s'obtenir en utilisant un monochromateur centré sur σ_0 , éclairé en lumière blanche et choisissant un jeu de fentes telle que la fente d'entrée soit de largeur très petite devant celle de la fente de sortie. Vous pourrez en Travaux Pratiques utiliser le monochromateur JOBIN-YVON H₂₀, qui comporte un réseau de 1200 traits par millimètre. Avec une fente de 0.1 mm à l'entrée et une fente de 2 mm en sortie, on obtient une source de densité spectrale quasiment rectangulaire sur une largeur $\Delta\lambda = 8$ nm.

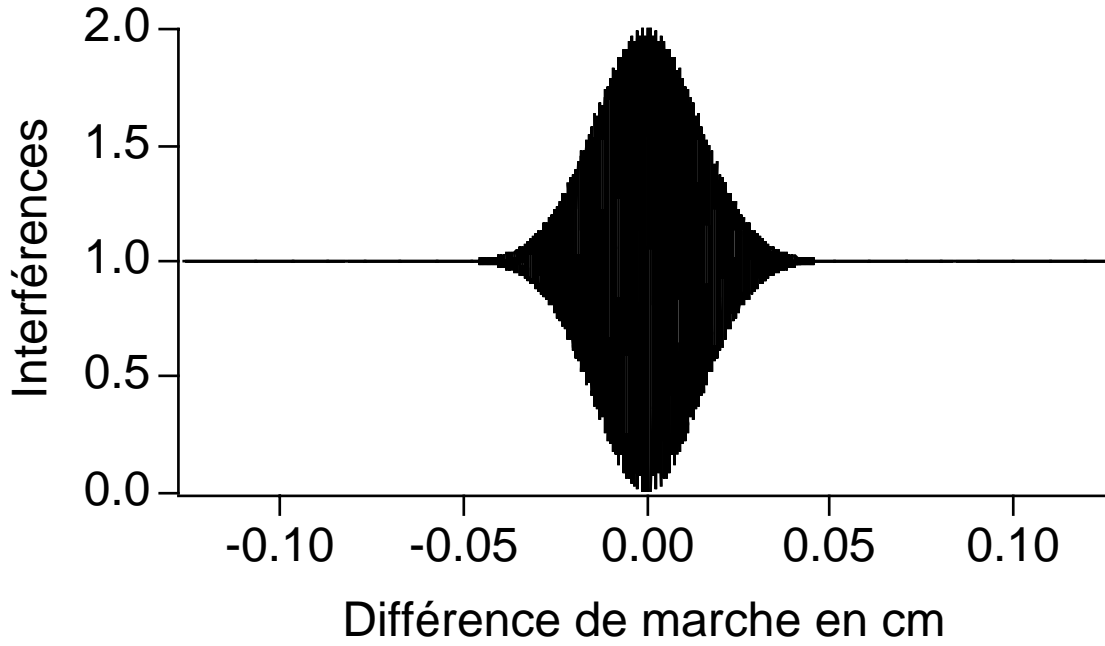


Figure 2: Figure d'interférences obtenue avec une source quasi-monochromatique, également centrée sur $\lambda_0 = 600$ nm et dont la densité spectrale a une forme gaussienne de largeur $\Delta\sigma = 1$ nm (cf. équation (20)). Pour $|\Delta| = 1/\Delta\sigma \simeq 0.036$ cm, le contraste est égal à $e^{-\pi} \simeq 0.04$, donc très faible.

$$I(\Delta) = \mathcal{I}_0 \Delta\sigma \left[1 + e^{-\pi(\Delta\Delta\sigma)^2} \cos 2\pi\sigma_0\Delta \right]$$

□ Densité spectrale lorentzienne

Considérons enfin une répartition lorentzienne, toujours centrée sur σ_0 et de largeur totale à mi-hauteur FWHM (pour l'anglais "Full Width at Half maximum") égale à $\Delta\sigma$:

$$\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}_0 \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\Delta\sigma} \right)^2} \quad (21)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \hat{I}(\Delta) &= \mathcal{I}_0 \Delta\sigma e^{-\pi(|\Delta| \Delta\sigma)} \cos 2\pi\sigma_0\Delta \\ I(\Delta) &= \mathcal{I}_0 \Delta\sigma \left[1 + e^{-\pi(|\Delta| \Delta\sigma)} \cos 2\pi\sigma_0\Delta \right] \end{aligned} \quad (22)$$

dont l'évolution en fonction de Δ est représentée sur la figure 3.3.

□ Conclusion

On voit sur ces trois exemples que, dès que la différence de marche Δ devient supérieure à une différence caractéristique $\simeq 1/\Delta\sigma$, le contraste des franges devient très faible. Nous retrouvons ainsi le résultat caractéristique de la transformée de Fourier d'une fonction en cloche de largeur $\Delta\sigma$: sa TF sera alors également une fonction en cloche dont la largeur est de l'ordre de $\Delta_C = 1/\Delta\sigma$. Le nombre N de franges visibles sur la figure d'interférence sera donc :

$$N \simeq \Delta_C \sigma_0 \simeq \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

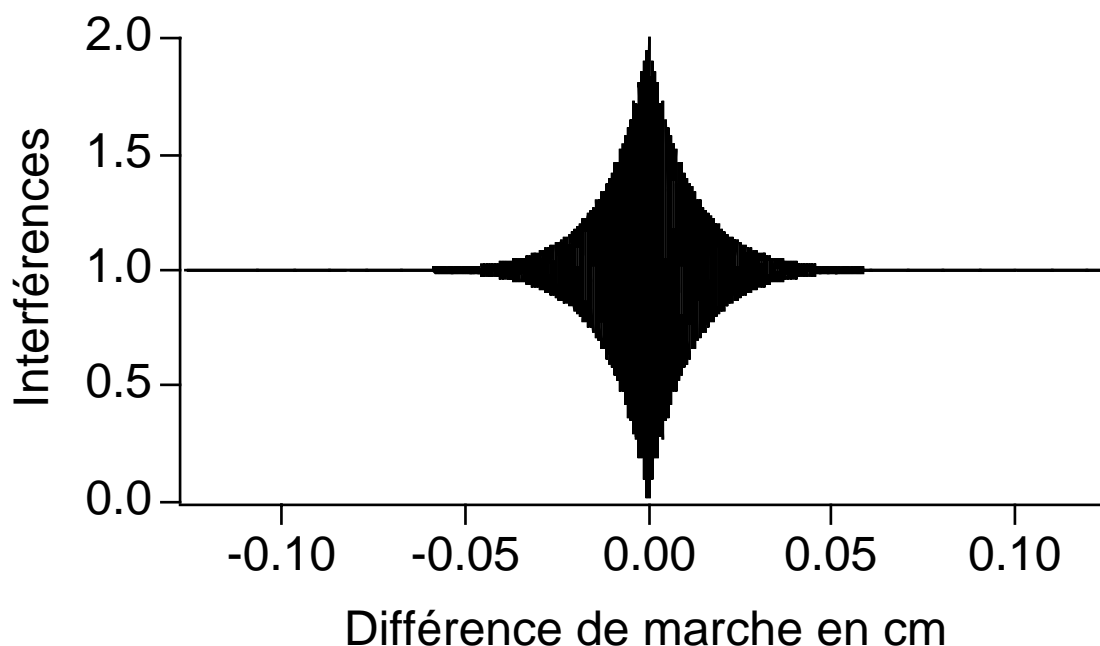


Figure 3: Figure d'interférences obtenue avec une source quasi-monochromatique, toujours centrée sur $\lambda_0 = 600$ nm et dont la densité spectrale a une forme lorentzienne de largeur FWHM $\Delta\sigma = 1$ nm (cf. équation (21)). Pour $|\Delta| = 1/\Delta\sigma$, le contraste est à nouveau égal à $e^{-\pi} \simeq 0.04$.

On définit la finesse \mathcal{F} de la raie spectrale utilisée comme :

$$\mathcal{F} = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} \quad (23)$$

si bien qu'au-delà d'un ordre d'interférences maximal $p_{\max} \simeq \mathcal{F}$, les franges vont disparaître.

Donnons-en un ordre de grandeur dans le cas d'une lampe à vapeur de mercure basse pression dont la raie "vert chou" à $\lambda_0 \simeq 546$ nm a typiquement une largeur $\Delta\lambda \simeq 5 \times 10^{-2}$ nm. La finesse de la raie est donc $\mathcal{F} \simeq 10^4$ et les franges d'interférences vont disparaître pour $|\Delta| > \mathcal{F}\lambda_0 \simeq 5.5$ mm. Nous verrons que de telles différences de marche peuvent être facilement obtenues en déplaçant un des miroirs de l'interféromètre de Michelson, qui est donc un instrument bien adapté à l'étude de la largeur des raies spectrales.

1.4 Franges d'interférences en lumière blanche

Lorsqu'on utilise une source de lumière blanche, on peut alors supposer que son spectre est informément plat sur une largeur $\Delta\lambda \approx \lambda$ soit une finesse $\mathcal{F} \simeq 1$. On pourrait donc en conclure qu'il existe seulement quelques franges visibles en lumière blanche.

C'est effectivement ce qui se passe si on utilise un photorécepteur tel qu'une photodiode, dont la sensibilité varie faiblement dans les différentes régions du spectre visible. Lorsqu'on observe par contre les franges à l'œil, on peut typiquement voir une dizaine de franges d'interférences. En effet, l'œil est un récepteur sélectif qui présente des sensibilités pouvant varier très sensiblement en fonction de la longueur d'onde. Les franges nous apparaissent très colorées, car les franges correspondant à différentes longueurs d'onde ont des largeurs différentes et sont décalées les unes par rapport aux autres. Des franges de couleurs différentes, même peu contrastées, vont par

conséquent être aisément distinguées par le vision ⁶ : on observe l'échelle des teintes de Newton avec des couleurs caractéristiques de la différence de marche Δ (voir Annexe B_{III}).

□ Frange achromatique

Remarquons qu'au centre du système d'interférences obtenus avec deux trous d'Young, les deux vibrations se recombinent en phase quelque soit la longueur d'onde. Il apparaît ainsi en $p = 0$ une frange achromatique, c'est-à-dire une frange brillante non-colorée.

Plaçons maintenant juste derrière un des deux trous une lame de verre plan-parallèle, présentant de la dispersion. Lorsqu'au voisinage d'une longueur d'onde λ_0 , les différentes vibrations se retrouveront superposées avec le même déphasage, il apparaîtra alors une frange achromatique. Cette condition est en fait équivalente à dire que l'ordre d'interférence p doit rester sensiblement constant pour les longueurs d'onde voisines de λ_0 :

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right) = 0 \quad (24)$$

soit en développant cette dérivée :

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} \right)_{\lambda_0} = \frac{\Delta(\lambda_0)}{\lambda_0}$$

Nous laissons en exercice au lecteur le soin de déterminer la position de la frange achromatique pour une lame de verre d'épaisseur e et dont l'indice de réfraction n dépend de la longueur d'onde suivant la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

⁶Voici une nouvelle illustration du fait qu'en optique, le détecteur utilisé fait partie intégrante de la description du phénomène interférentiel. Il est absolument nécessaire de conserver présent à l'esprit ce point capital !

2 Notions sur les processus aléatoires

2.1 Processus aléatoire réel stationnaire et ergodique

Rappelons qu'un processus aléatoire $x(t)$ est un ensemble de variables aléatoires paramétrées en fonction du temps. Un ensemble de tirages particuliers de ces variables aléatoires constitue un échantillon (appelé également une réalisation) du processus aléatoire.

La description complète du processus aléatoire nécessiterait de connaître la densité de probabilité conjointe de l'ensemble des variables aléatoires associées à tous les instants, ce qui est évidemment inconcevable. Par conséquent, on se borne en général à l'étude de deux quantités :

- la valeur moyenne à un instant donné :

$$\langle x(t) \rangle = \langle x \rangle(t) = \int dx p(x, t) x \quad (25)$$

- la fonction d'autocorrélation à deux temps :

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \langle x_1(t)x_2(t) \rangle = \int \int dx_1 dx_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2) x_1 x_2 \quad (26)$$

calculées en fonction de la densité de probabilité $p(x, t)$ de la variable aléatoire x à l'instant t , et de la probabilité conjointe $p(x_1, t_1; x_2, t_2)$ des variables aléatoires x_1 et x_2 aux instants t_1 et t_2 . La notation $\langle \dots \rangle$ indique une moyenne au sens statistique, c'est-à-dire effectuée sur un hypothétique ensemble constitué d'un très grand nombre de systèmes préparés de façon identique.

On rencontre fréquemment des processus *stationnaires*, dont les propriétés sont invariantes par translation dans le temps. La moyenne exprimée en (25) est alors indépendante du temps t :

$$\langle x(t) \rangle = \langle x \rangle \quad (27)$$

et la fonction d'autocorrélation définie en (26) ne dépend que la différence $\tau = t_2 - t_1$:

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_2 - t_1) = \Gamma_x(\tau) \quad (28)$$

Nous admettrons enfin que tous les processus stationnaires rencontrés vérifient l'hypothèse d'*ergodicité* : les moyennes temporelles effectuées sur une réalisation particulière pendant un temps T "suffisamment long" coïncident avec les moyennes d'ensemble correspondantes, soit :

$$\frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \langle x \rangle \quad (29)$$

$$\frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau) dt = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \Gamma_x(\tau) \quad (30)$$

Cette hypothèse très importante en physique statistique implique que n'importe quel échantillon est tout-à-fait représentatif de la totalité de l'ensemble statistique, à la condition de suivre son évolution suffisamment longtemps. Cette constatation permet souvent de justifier l'hypothèse d'ergodicité sur la base d'arguments physiques.

Rappelons enfin quelques propriétés, qui se montrent sans difficultés à partir des deux relations précédentes :

- La fonction d'autocorrélation est paire :

$$\Gamma_x(-\tau) = \Gamma_x(\tau) \quad (31)$$

- La variance $\sigma_x^2 = \langle [x(t) - \langle x \rangle]^2 \rangle$ ⁷ est reliée à $\Gamma_x(\tau = 0)$ par :

$$\sigma_x^2 = \langle [x(t)]^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \Gamma_x(0) - \langle x \rangle^2 \quad (32)$$

2.2 Processus aléatoire complexe

Les définitions données ci-dessus peuvent être généralisées à un processus aléatoire $z(t)$ évoluant dans le plan complexe. Il faut cependant prendre garde qu'à chaque instant, la variable z est en fait un ensemble de deux variables aléatoires (ou une variable aléatoire à deux dimensions) :

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi} \quad (33)$$

de sorte qu'il est nécessaire de connaître la densité de probabilité conjointe $p(x, y, t)$ pour caractériser les propriétés statistiques de la variable z . En fonction de cette loi, on en déduit alors les valeurs moyennes (qui sont indépendantes du temps dans le cas stationnaire) :

$$\langle x \rangle = \iint dx dy x p(x, y) \quad \langle y \rangle = \iint dx dy y p(x, y) \quad (34)$$

d'où on tire immédiatement :

$$\langle z \rangle = \langle x \rangle + i \langle y \rangle \quad (35)$$

Il existe quatre moments d'ordre deux de la variable aléatoire z , qui constituent la matrice 2×2 des covariances à un instant t donné :

$$[\sigma_z^2] = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

où les variances σ_x^2 et σ_y^2 sont définies par :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \left(\iint dx dy x^2 p(x, y) \right) - \langle x \rangle^2 \\ \sigma_y^2 &= \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \left(\iint dx dy y^2 p(x, y) \right) - \langle y \rangle^2 \end{aligned}$$

Le terme non-diagonal est quant-à lui symétrique :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle = \left(\iint dx dy xy p(x, y) \right) - \langle x \rangle \langle y \rangle$$

et obéit à l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sigma_{xy} \leq \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$$

de sorte que le rapport $\sigma_{xy} / \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$ est le coefficient de corrélation entre les parties réelles et imaginaires de la variable complexe z .

Les propriétés d'ordre deux que nous venons de définir concernent des moyennes à un temps. Pour caractériser l'évolution moyenne du processus (supposé stationnaire), on pourrait introduire

⁷La quantité σ_x nous donne l'écart quadratique moyen du processus aléatoire.

des quantités analogues mais faisant intervenir *deux temps*, que l'on pourrait définir à partir de la probabilité conjointe $p(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2)$. En pratique, pour les problèmes que nous rencontrons habituellement ⁸, on peut se contenter de la fonction d'autocorrélation complexe définie par :

$$\Gamma_z(\tau) = \langle z^*(t)z(t+\tau) \rangle \quad (37)$$

et qui vaut (avec des notations évidentes) :

$$\Gamma_z(\tau) = \Gamma_x(\tau) + \Gamma_y(\tau) + i [\Gamma_{xy}(\tau) - \Gamma_{xy}(-\tau)] \quad (38)$$

Les fonctions d'autocorrélation complexes possèdent de nombreuses propriétés utiles, dont nous citons les plus importantes :

- La relation (31) se généralise en $\Gamma_z(-\tau) = \Gamma_z(\tau)^*$;
- Pour $\tau = 0$, Γ_z est de façon évidente réel et $\Gamma_z(\tau = 0) \geq 0$;
- L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit $|\Gamma_z(\tau)| \geq \Gamma_z(\tau = 0)$;
- Si $\tau \rightarrow +\infty$, les variables aléatoires $z(t)$ et $z(t+\tau)$ deviennent décorréliées et on a ainsi la limite $\Gamma_z(\tau \rightarrow +\infty) = \langle z^*(t) \rangle \langle z(t+\tau) \rangle = |\langle z \rangle|^2$.

En utilisant ces propriétés, on voit que :

$$\Gamma_z(0) = \langle |z|^2 \rangle \geq |\langle z \rangle|^2$$

de sorte que la quantité $|\Gamma_z(\tau)| - |\langle z \rangle|^2$ est paire et maximale à l'origine $\tau = 0$. Quand τ croît, cette quantité a une tendance générale à la décroissance et tend vers zéro lorsque τ tend vers l'infini (voir les exemples traités dans le chapitre III). Ceci va nous permettre de définir le temps de corrélation τ_C du processus aléatoire, comme le temps au-delà duquel la quantité $|\Gamma_z(\tau)| - \Gamma(\infty)$ devient inférieure à une fraction de l'ordre de la moitié de la quantité initiale $\Gamma_z(0) - \Gamma(\infty)$:

$$|\Gamma_z(\tau \geq \tau_C)| - \Gamma(\infty) < \frac{\tilde{1}}{2} [\Gamma_z(0) - \Gamma(\infty)]$$

le facteur $\frac{\tilde{1}}{2}$ étant de l'ordre de $\frac{1}{2}$, sa valeur précise allant dépendre du profil considéré.

2.3 Densité spectrale de puissance

Rappelons que si une fonction complexe $f(t)$ est de module carré sommable, on peut définir sa transformée de Fourier $\hat{f}(\nu)$ telle que :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{-2i\pi\nu t} d\nu \quad \leftrightarrow \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2i\pi\nu t} dt \quad (39)$$

Considérons un processus aléatoire complexe stationnaire $z(t)$. A cause de la stationnarité, le carré du module de $z(t)$ n'est certainement pas sommable et, en toute rigueur, il est impossible de définir sa transformée de Fourier ⁹. En revanche, si on considère la fonction $z_T(t)$, égale à $z(t)$ sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, et nulle en dehors ¹⁰, chaque échantillon $z_T(t)$ (obtenu en tronquant

⁸Comme par exemple l'étude de l'évolution de la figure d'interférences à deux ondes en fonction de la différence de marche entre les deux voies de l'interféromètre.

⁹Je remercie Renaud SKRYPECK, élève l'an passé, d'avoir attiré mon attention sur cette difficulté mathématique dont l'importance m'avait échappé...

¹⁰Le temps T ainsi introduit peut être interprété comme correspondant au temps d'interaction du système représenté par la variable aléatoire z avec les appareils de mesure.

$z(t)$ va posséder une transformée de Fourier $\hat{z}_T(\nu)$. Il est alors possible de définir la **densité spectrale de puissance** par la relation :

$$S_z(\nu) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \langle |\hat{z}_T(\nu)|^2 \rangle \quad (40)$$

et nous admettrons que cette limite existe dans la plupart des cas que nous rencontrons en physique... On peut facilement se convaincre que pour un signal aléatoire, la phase d'une composante de Fourier n'a pas de signification particulière, et que seul le module de l'amplitude à une fréquence ν donnée a un intérêt physique.

A côté de cet argument pouvant apparaître comme spécieux à certains, le spectre de puissance possède un certain nombre de propriétés intéressantes, qui en font un outil très utile.

On a ainsi l'égalité :

$$\langle |z(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\nu) d\nu \quad (41)$$

Cette relation se démontre facilement à partir de l'inégalité de Parseval–Plancherel entre une fonction et sa transformée de Fourier (conservation de la norme dans la TF) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\hat{z}_T(\nu)|^2 \rangle d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |z_T(t)|^2 \rangle dt$$

Il suffit ensuite de prendre la moyenne statistique des deux membres, puis de passer à la limite à l'infini après avoir divisé par le temps caractéristique T .

Cette propriété (41) permet de justifier l'appellation “densité spectrale de puissance”. Si nous supposons par exemple que la variable complexe $z(t)$ représente le champ électrique complexe d'une onde progressive, la quantité $\langle |z_T(t)|^2 \rangle$ est (à un facteur multiplicatif près) le vecteur de Poynting moyen, c'est-à-dire la puissance totale moyenne qui est transportée par l'onde. Pour cet exemple, $S_z(\nu) d\nu$ apparaît comme la puissance moyenne qui est transportée dans une bande étroite $d\nu$ autour de la fréquence ν puisque les puissances moyennes transportées dans les diverses bandes de fréquence vont s'ajouter (la moyenne des termes croisés oscillants vaut évidemment zéro).

□ Passage à travers un filtre linéaire monochromatique

Nous appellerons **filtre linéaire** un dispositif F qui “répond” linéairement à une variable appliquée (appelée variable d'entrée). Nous supposerons qu'il fait correspondre à un champ monochromatique $\mathcal{S}_\nu e^{-2i\pi\nu t}$ entrant un signal de sortie :

$$z^{\text{in}}(t) = \mathcal{S}_\nu e^{-2i\pi\nu t} \quad \rightarrow \quad z^{\text{out}}(t) = G_{\mathcal{F}}(\nu) \mathcal{S}_\nu e^{-2i\pi\nu t} \quad (42)$$

où $G_{\mathcal{F}}(\nu)$ est par définition la **fonction de réponse complexe** du filtre ¹¹

La linéarité du filtre fait qu'à un signal d'entrée $z_T^{\text{in}}(t)$ va correspondre la “réponse” :

$$z_T^{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mathcal{F}}(\nu) \hat{z}_T^{\text{in}}(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu \quad (43)$$

Cette relation montre que si on choisit en particulier pour $z^{\text{in}}(t)$ une percussion en $t = 0$ (fonction δ pour laquelle sa transformée de Fourier $\hat{z}_T^{\text{in}}(\nu)$ est une constante), la réponse

¹¹ Cette fonction est a priori complexe, de manière à rendre compte du déphasage qui existe généralement entre les signaux d'entrée et de sortie du filtre. On peut montrer de façon très générale qu'il existe cependant un lien entre les parties réelle et imaginaire de $G_{\mathcal{F}}(\nu)$. Cette relation (dite de Kramers–Kronig) traduit le principe de causalité selon lequel le filtre ne peut “répondre” avant d'avoir été excité.

temporelle du filtre F à cette percussion sera la transformée de Fourier de la réponse en fréquence $G_{\mathcal{F}}(\nu)$.

Calculons maintenant la densité spectrale de puissance du signal de sortie :

$$|z_T^{\text{out}}(t)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \iint d\nu d\nu' G_{\mathcal{F}}(\nu') G_{\mathcal{F}}^*(\nu) \left(\hat{z}_T^{\text{in}}(\nu) \right)^* \hat{z}_T^{\text{in}}(\nu') e^{i2\pi(\nu-\nu')t}$$

L'intégrale sur t s'écrit :

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i2\pi(\nu-\nu')t} = \frac{\sin \pi(\nu-\nu')T}{\pi(\nu-\nu')}$$

Il s'agit d'une fonction sinus cardinal qui a une largeur égale à $1/T$, tendant vers 0 lorsque T tend vers l'infini. On l'assimilera donc pour T grand à $T\delta(\nu-\nu')$. D'où en reportant dans la formule précédente :

$$|z_T^{\text{out}}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu |G_{\mathcal{F}}(\nu)|^2 |\hat{z}_T^{\text{in}}(\nu)|^2$$

soit par passage à la limite et en identifiant à la formule (41) :

$$S_z^{\text{out}}(\nu) = |G_{\mathcal{F}}(\nu)|^2 S_z^{\text{in}}(\nu) \quad (44)$$

Choisissons à titre d'exemple un filtre linéaire de forme passe-bande centré autour de ν_0 , et de largeur $\Delta\nu$:

$$|G_{\mathcal{F}}(\nu)|^2 = \text{Rect} \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} \right) \quad (45)$$

Le signal aléatoire z^{out} en sortie du filtre a pour densité spectrale de puissance :

$$\langle |z^{\text{out}}|^2 \rangle = S_z^{\text{in}}(\nu_0) \Delta\nu$$

qui correspond au produit entre la densité spectrale de puissance du signal d'entrée multipliée par la largeur du filtre. Cet exemple va nous permettre de donner une interprétation physique à la limite " T grand". Il faut en effet que la fonction sinus cardinal soit assimilable à une fonction δ , avec une "largeur" très inférieure à celle de $|G_{\mathcal{F}}(\nu)|^2$, soit :

$$\frac{1}{T} \ll \Delta\nu \quad \text{ou} \quad T \gg \frac{1}{\Delta\nu}$$

La mesure doit donc durer suffisamment longtemps pour ne pas limiter la précision déterminée par la largeur spectrale du filtre ¹².

Cette formule (45) montre qu'en balayant la fréquence centrale du filtre, nous pouvons déterminer de cette manière la totalité du spectre de puissance $S_z^{\text{in}}(\nu)$. On dispose effectivement d'instruments comme les analyseurs de spectre radio-fréquence (RF) qui sont fonctionnellement équivalents à un filtre passe-bande étroit balayable en fréquence et grâce auxquels il est possible de mesurer la densité spectrale d'un signal radio-fréquence aléatoire. Nous verrons qu'en optique, les spectromètres de type Fabry-Perot réalisent également cette fonction de filtrage ¹³.

Puisque $S_z^{\text{in}}(\nu)$ est définie comme une valeur moyenne, nous pouvons remarquer que la formule (44) fait intervenir des fonctions certaines : tout aspect aléatoire a donc disparu. La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire est par conséquent une quantité fondamentale pour caractériser ce processus :

¹²On peut faire le lien avec les relations de dispersion !

¹³Il existe cependant une petite subtilité due au fait que ces appareils ne peuvent distinguer entre fréquences positives et négatives. Il convient alors de multiplier par 2 le second membre de la formule (44)

- Cette fonction est directement mesurable à l’aide d’une succession de filtres étroits ;
- Le théorème de Wiener–Kintchine que nous allons maintenant démontrer va établir un résultat fondamental : la densité spectrale de puissance est directement reliée à la fonction d’autocorrélation de la variable aléatoire, qui est souvent la quantité la plus simple à manipuler dans les modèles théoriques. Par contre, l’autocorrélation est en général plus difficile à déterminer directement par l’expérience.

2.4 Théorème de Wiener–Kintchine

Ce théorème se démontre facilement en généralisant le calcul qui nous a conduit à la relation (44). Il suffit de noter que la fonction

$$Z_T(t) = z_T(t + \tau)$$

a pour transformée de Fourier

$$\hat{Z}_T(\nu) = \hat{z}_T(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau}$$

Le théorème de Parseval–Plancherel nous permet alors d’écrire :

$$\int [z_T(t)]^* Z_T(t) dt = \int [\hat{z}_T(\nu)]^* \hat{Z}_T(\nu) d\nu$$

En prenant la moyenne statistique, on a

$$\int_T \langle z^*(t)z(t + \tau) \rangle dt = \int \langle |\hat{z}_T(\nu)|^2 \rangle e^{(-i2\pi\nu\tau)} d\nu$$

En divisant les deux membres de cette équation par T , puis en passant à la limite T “grand”, on obtient :

$$\Gamma_z(\tau) = \int S_z(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (46)$$

Ce résultat constitue le théorème de Wiener–Kintchine :

La fonction d’autocorrélation d’un processus aléatoire est la transformée de Fourier de sa densité spectrale de puissance, et réciproquement.

Ce théorème est fondamental dans de nombreux domaines de la physique. En optique, il nous permettra de relier le spectre, qui peut être expérimentalement obtenu grâce à un spectroscopie, avec la description théorique de la vibration lumineuse qui est nécessairement de nature statistique.

Insistons en conclusion sur la *complémentarité* des approches temporelle et spectrale. En fonction des propriétés de la TF, un temps de corrélation τ_C court est associé à un spectre $\Delta\nu$ large, et inversement.

Considérons à titre d’exemple un filtre interférentiel qui sélectionne une composante spectrale. Ce dispositif va également lisser les fluctuations et allonger le temps de corrélation du champ. Un tel mécanisme de “lissage” des fluctuations temporelles peut facilement s’interpréter avec l’action d’un filtre de type Fabry–Pérot. Supposons qu’une fluctuation rapide du champ

arrive sur l'étalon. Au cours des réflexions successives à l'intérieur de la cavité, cette fluctuation va se retrouver "repliée" sur elle-même. Cet allongement dans le temps va conduire à un signal de sortie beaucoup plus "lisse". L'étalon résonnant se comporte à la manière d'une cloche qui allonge une percussion brève en un son très long, en filtrant les composantes rapides de la vibration excitatrice.

2.5 Corrélations d'amplitude et interférométrie à deux ondes

Considérons l'expérience de la figure 4, où un faisceau lumineux incident est partagé en deux faisceaux qui se recombinent après avoir suivi des trajets différents. Les vibrations lumineuses arrivant au point d'observation M sont de la forme :

$$\mathcal{S}_1(M, t) = \sqrt{T_1} \mathcal{S}(t - \frac{L_1}{c}) \quad \mathcal{S}_2(M, t) = \sqrt{T_2} \mathcal{S}(t - \frac{L_2}{c}) \quad (47)$$

Dans ces expressions, T_1 et T_2 sont des coefficients rendant compte de la transmission de la puissance incidente le long de chaque voie, et décrivant l'action des deux lames séparatrices. Les longueurs L_1 et L_2 représentent les trajets optiques associés, et rendent compte du retard dû à la propagation depuis la source. Nous supposons que L_1 et L_2 sont indépendants de la fréquence ν de l'onde, comme cela est le cas pour la grande partie des interféromètres à deux ondes. ' .

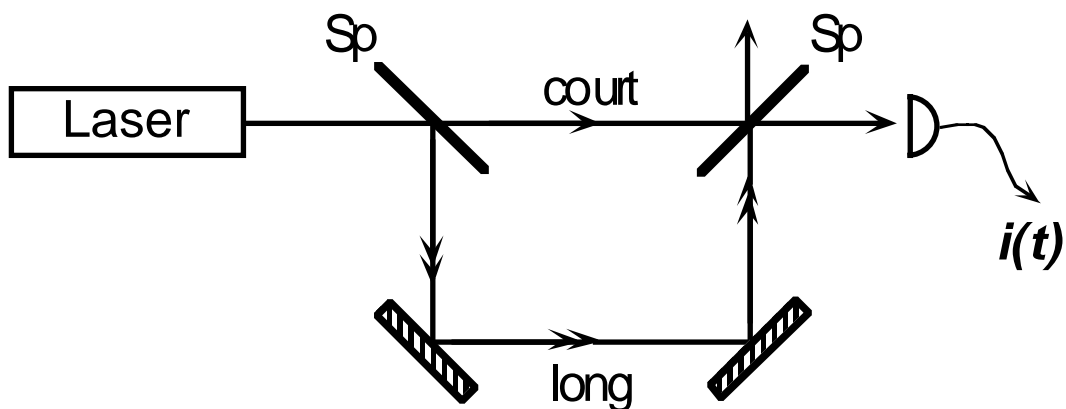


Figure 4: Schéma de base d'une expérience d'interférences à deux ondes. On a ici représenté un interféromètre de type Mach-Zehnder où les deux vibrations lumineuses sont déphasées d'une quantité contrôlée par la différence de trajet $L' - L''$ entre les deux parcours court-long.

Dans ces expressions, T' et T'' sont des coefficients rendant compte de la transmission de la puissance incidente le long de chaque voie, et décrivant l'action des deux lames séparatrices. Les longueurs L' et L'' représentent les trajets optiques associés, et rendent compte du retard dû à la propagation depuis la source. Nous supposons que L' et L'' sont indépendants de la fréquence ν de l'onde, comme cela est le cas pour la grande partie des interféromètres à deux ondes.

Un photodétecteur placé au point d'observation est alors sensible à l'intensité lumineuse :

$$\begin{aligned} I(M, t) &= \overline{|\mathcal{S}'(t) + \mathcal{S}''(t)|^2} \\ &= \overline{|\mathcal{S}'(t)|^2} + \overline{|\mathcal{S}''(t)|^2} + 2 \operatorname{Re} \overline{\mathcal{S}'^*(t) \mathcal{S}''(t)^*} \end{aligned}$$

On peut récrire cette expression sous la forme

$$I(M, t) = T' \overline{|\mathcal{S}(t - \frac{L'}{c})|^2} + T'' \overline{|\mathcal{S}(t - \frac{L''}{c})|^2} + 2\sqrt{T'T''} \operatorname{Re} \left[\overline{\mathcal{S}^*(t - \frac{L'}{c}) \mathcal{S}(t - \frac{L''}{c})} \right]$$

et si nous remplaçons les moyennes temporelles par des moyennes statistiques prises sur la vibration lumineuse \mathcal{S} :

$$I(M, t) = (T' + T'') \Gamma_{\mathcal{S}}(0) + 2\sqrt{T'T''} \operatorname{Re} [\Gamma_{\mathcal{S}}(\tau)] \quad (48)$$

avec

$$\tau = \frac{L' - L''}{c} \quad (49)$$

En fonction de l'expression (??) de la fonction d'autocorrélation de \mathcal{S} , nous retrouvons le fait que les franges d'interférences vont disparaître dès lors que $|\tau| \gg \tau_C$. On définit la fonction de corrélation du champ (également appelée degré de cohérence temporelle au 1er ordre) par :

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\Gamma_{\mathcal{S}}(\tau)}{\Gamma_{\mathcal{S}}(0)} = \frac{\overline{\mathcal{S}(t)^* \mathcal{S}(t + \tau)}}{\overline{\mathcal{S}(t)^* \mathcal{S}(t)}} \quad (50)$$

d'où :

$$I(P) = 2 \overline{I(t)} \left[1 + \operatorname{Re} \left\{ g^{(1)}(\tau) \right\} \right] \quad (51)$$

3 Modèle de source incohérente

3.1 Description du modèle et intensité émise

Nous considérons comme précédemment une source ponctuelle formée de N atomes dans un gaz, excités par une décharge électrique. Ces émetteurs produisent chacun un champ de même fréquence ω_0 et de même amplitude \mathcal{S}_0 , avec une phase $(\varphi_k)_{k=1 \dots N}$ dépendant de l'émetteur considéré.

La vibration lumineuse ainsi produite en un point \vec{r} éloigné de cette source s'obtient comme une superposition scalaire de tous les champs :

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_0 \sum_{k=1}^N e^{-i(\omega_0 t - \varphi_k)}$$

On suppose de plus que chaque émetteur a une probabilité de changer de phase φ_k de façon aléatoire, après un temps lui-même aléatoire. On note $\pi(\tau)$ la probabilité pour l'émission de l'atome ne soit pas déphasée entre les instants t et $t + \tau$.

Afin de modéliser cet effet de brouillage, supposons par exemple que la perturbation soit due à une collision avec un autre atome du gaz. Le dipôle porté par l'atome perd alors sa mémoire de phase et, reprend après la collision son oscillation avec une phase non-corrélée à celle qu'il avait précédemment. Notons qu'un modèle de ce type serait également valable pour des cycles absorption-émission spontanée des atomes. Dans ce cas, les atomes sont portés à des

instants aléatoires dans un niveau excité (à l'aide d'un processus de pompage), puis rayonnent par émission spontanée lors de leur désexcitation vers le niveau fondamental.

D'après la théorie cinétique des gaz parfaits, la probabilité pour une molécule de subir une collision pendant un intervalle de temps dt est uniforme et vaut dt/τ_C , où τ_C est le temps caractéristique de collision, déterminé par le libre parcours moyen l_C et la vitesse moyenne \bar{v} des atomes :

$$\tau_C = \frac{l_C}{\bar{v}} \quad (52)$$

La probabilité $\Pi(t + dt)$ que l'atome n'ait pas subi de collision pendant dt s'écrit ainsi :

$$\Pi(t + dt) = \Pi(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau_C}\right) \quad (53)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = -\frac{\Pi(t)}{\tau_C} \quad (54)$$

et donc :

$$\Pi(t) = e^{-t/\tau_C} \quad (55)$$

Nous négligeons le facteur de normalisation de cette loi de probabilité, sans importance du point de vue des conséquences physiques. Cette fonction tend vers 0 pour t grand. Sa largeur caractéristique τ_C représente la durée caractéristique de mémoire de phase du dipôle : si on observe le champ sur un intervalle de temps court devant τ_C , il apparaît comme un train d'onde quasi-monochromatique. Sur un intervalle de temps long, il va se présenter comme une succession de trains d'onde de phase incorrélés séparés par des périodes de vol libre.

On suppose pour la suite que :

$$\omega_0 \tau_C \gg 1 \quad (56)$$

Chaque train d'onde est par conséquent formé d'un très grand nombre d'oscillations du champ (hypothèse de quasi-monochromaticité).

□ Intensité moyenne émise par la source

En reproduisant les calculs effectués précédemment, l'intensité *moyenne* $\overline{I(t)}$ mesurée par un détecteur est donnée par :

$$\overline{I(t)} = S_0^2 \overline{\left| \sum_k e^{i\varphi_k(t)} \right|^2} = S_0^2 \sum_k \sum_l \overline{e^{i[\varphi_k(t) - \varphi_l(t)]}} \quad (57)$$

Les termes φ_k correspondant à des variables aléatoires non-corrélées entre elles, les termes de cette somme pour lesquels $i \neq j$ vont donner une valeur moyenne nulle. Seuls les N termes $i = j$ vont donc subsister et :

$$\overline{I(t)} = N S_0^2 \quad (58)$$

Puisque les champs rayonnés par les différents atomes n'interfèrent pas et que l'intensité moyenne est simplement la somme des intensités rayonnées par chaque émetteur, la source peut effectivement être qualifiée d'**incohérente**.

□ Intensité quadratique moyenne émise par la source

Calculons de la même façon la valeur quadratique moyenne de l'intensité émise par la source :

$$\overline{[I(t)]^2} = S_0^4 \overline{\left| e^{i\varphi_1(t)} + e^{i\varphi_2(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)} \right|^4} \quad (59)$$

Là encore, les seuls termes non-nuls sont ceux pour lequel chaque facteur est multiplié par son propre complexe conjugué. On obtient ainsi après avoir dénombré ces différents termes :

$$\overline{[I(t)]^2} = \mathcal{S}_0^4 \left\{ \sum_k \overline{|e^{i\varphi_k(t)}|^4} + \sum_{k \neq l} \overline{|2e^{i\varphi_k(t)}e^{i\varphi_l(t)}|^2} \right\} \quad (60)$$

$$= \mathcal{S}_0^4 \{N + 2N(N - 1)\} \quad (61)$$

En fonction de l'intensité moyenne $\overline{I(t)}$ calculée précédemment (cf. équation (58)), cette expression peut s'écrire :

$$\overline{[I(t)]^2} = \left(2 - \frac{1}{N}\right) [\overline{I(t)}]^2 \quad (62)$$

soit pour un grand nombre d'atomes dans la source ($N \gg 1$)

$$\overline{[I(t)]^2} \simeq 2 [\overline{I(t)}]^2 \quad (63)$$

3.2 Interprétation : champ gaussien fluctuant

Si nous nous plaçons dans le plan complexe, l'amplitude $\mathcal{S}(t)$ de la vibration lumineuse est construite à partir des contributions élémentaires qui correspondent à l'émission de chaque atome (fig.5). Cette description va nous permettre de décrire plus simplement les fluctuations d'intensité du champ, en utilisant des résultats élémentaires de physique statistique.

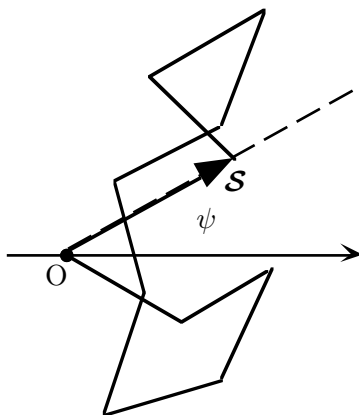


Figure 5: Diffusion dans le plan complexe associée à l'émission d'une vibration lumineuse par N émetteurs incohérents.

Supposons que l'on dispose d'un détecteur quadratique rapide ayant un temps de réponse très petit devant τ_C . Mesurons l'intensité $I(t)$ durant ce temps de réponse et répétons la mesure à des instants $t_1, t_2, \dots, t_p, \dots$ distribués sur un intervalle de temps long devant τ_C . Construisons enfin l'histogramme des valeurs trouvées. A la limite où le nombre de mesures devient infini, on obtiendra alors la loi de probabilité de l'intensité. Cherchons donc à déterminer la valeur $\mathcal{P}(I)dI$ qui correspond à la probabilité qu'une telle mesure instantanée de l'intensité donne une valeur comprise entre I et $I + dI$. Comme le suggère la figure 5, l'extrémité du vecteur de Fresnel représentant le champ total dans le plan complexe va résulter d'une "marche au hasard" à deux dimensions, dans laquelle les fluctuations de l'intensité du champ et de sa phase sont donc deux aspects complètement indissociables.

On montre en particulier que, dans une telle marche au hasard, la probabilité de se trouver à une distance D de l'origine après un grand nombre de "pas" est une fonction gaussienne de

la forme $\exp(-D^2/D_0^2)$ où D_0 est la valeur quadratique moyenne de l'écart à l'origine. Dans le vocabulaire de l'optique statistique, un tel champ ayant cette répartition statistique d'intensité est donc appelé *champ gaussien*¹⁴, pour lequel nous aurons :

$$\mathcal{P}(I) = \frac{1}{\overline{I(t)}} e^{-I/\overline{I(t)}} \quad (64)$$

Cette loi poissonnienne donnant la loi de probabilité $\mathcal{P}(I)$ est représentée sur la figure 6. L'intensité la plus probable est 0 et la probabilité de mesurer une grande valeur de l'intensité instantanée $I(t)$ est d'autant plus petite que cette valeur est plus grande. Enfin, $\overline{I(t)}$ représente évidemment la valeur moyenne que nous avons calculée précédemment (équation (58)),

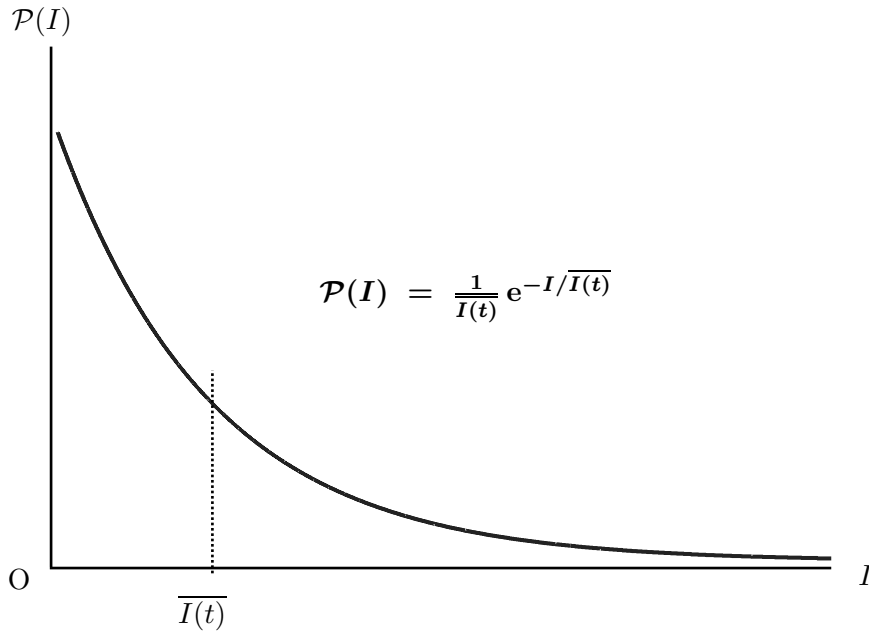


Figure 6: Loi de probabilité poissonnienne de l'intensité.

Ce même détecteur rapide (c'est-à-dire dont le temps de réponse est beaucoup plus petit que τ_C) mesurant l'intensité "instantanée" permet également d'obtenir une mesure de toute fonction de $I(t)$, comme par exemple $[I(t)]^n$. En moyennant ensuite sur un grand nombre de mesures répétées sur un intervalle de temps long devant τ_C , on construira la valeur moyenne $\overline{[I(t)]^n}$ pour laquelle :

$$\overline{[I(t)]^n} = \int dI \mathcal{P}(I) I^n \quad (65)$$

ce qui correspond mathématiquement aux moments de la distribution de probabilité poissonnienne $\mathcal{P}(I)$ définie par l'équation (64) :

$$\overline{[I(t)]^n} = \frac{1}{\overline{I(t)}} \int dI e^{-I/\overline{I(t)}} I^n = n! [\overline{I(t)}]^n \quad (66)$$

Pour un tel champ, la moyenne de la puissance " n " de l'intensité est égale à n fois l'intensité moyenne à la puissance n . En d'autres termes, les grandes fluctuations de l'intensité sont "favorisées" dans l'opération qui consiste à calculer I^n .

¹⁴Il ne faut cependant pas confondre cette distribution gaussienne des fluctuations d'intensité avec la répartition spectrale, dont la forme dépend du processus envisagé pour le "mécanisme" de perte de mémoire de phase.

L'expression générale (66) nous permet également de retrouver les valeurs déterminées précédemment pour l'intensité moyenne $\overline{I(t)}$ (équation (58)) et l'intensité quadratique moyenne $\overline{I(t)^2}$ (équation (63)). L'écart quadratique moyen des fluctuations d'intensité est donc donné par :

$$\Delta I = \sqrt{\overline{I(t)^2} - \overline{I(t)}^2} = \overline{I(t)} \quad (67)$$

L'amplitude "rms" des fluctuations d'intensité est par conséquent égale à l'intensité moyenne. Ceci est une nouvelle signature du fait que les fluctuations de la phase du champ sont associées à d'importantes fluctuations d'intensité.

3.3 Retrouvons le modèle des trains d'onde

Calculons la fonction de corrélation $g^{(1)}(\tau)$ dans le cas du modèle de source gaussienne étudié précédemment, soit :

$$\overline{\mathcal{S}(t)^* \mathcal{S}(t+\tau)} = \mathcal{S}_0^2 e^{i\omega_0\tau} \overline{\sum_k \sum_l e^{i\varphi_k(t) - i\varphi_l(t+\tau)}} \quad (68)$$

Pour $k \neq l$, l'ensemble des termes donne zéro quelque soit τ , car les phases de deux dipôles différents sont non-corrélées. Il ne subsiste donc que les termes correspondant à $k = l$, soit :

$$\overline{\mathcal{S}(t)^* \mathcal{S}(t+\tau)} = \mathcal{S}_0^2 e^{i\omega_0\tau} \overline{\sum_k e^{i\varphi_k(t) - i\varphi_k(t+\tau)}} \quad (69)$$

Chaque terme donne dans cette somme une contribution égale à 1 si le dipôle n'a pas été déphasé entre les instants t et $t + \tau$. Dans le cas contraire, il correspond à un terme à phase aléatoire et la sommation sur ces derniers dipôles donne 0. La fraction du nombre total de dipôles qui n'ont pas subi de collision entre t et $t + \tau$ est directement donnée par la distribution de probabilité $\Pi(\tau)$ déterminée à l'éq. (55), d'où :

$$\overline{\mathcal{S}(t)^* \mathcal{S}(t+\tau)} = N \mathcal{S}_0^2 e^{i\omega_0\tau} \Pi(\tau) \quad (70)$$

La fonction de corrélation du champ vaut donc :

$$g^{(1)}(\tau) = e^{i\omega_0\tau} e^{-\tau/\tau_C} \quad (71)$$

Le calcul précédent ayant été fait en supposant implicitement que $\tau \geq 0$, la fonction $g^{(1)}(\tau)$ est paire. Sa largeur est déterminée par le paramètre τ_C , temps caractéristique de corrélation du champ.

L'intensité observée dans une expérience d'interférences à deux ondes est obtenue en appliquant directement l'équation (51) :

$$I(P) = 2 \overline{I(t)} \left[1 + e^{-\tau/\tau_C} \cos \omega_0\tau \right] \quad (72)$$

expression similaire à celle que nous avons précédemment obtenue à l'équation 22. La variation des franges d'interférences en fonction de la différence de marche $\Delta = \omega_0\tau$ correspond donc à celle représentée sur la figure . Le domaine de visibilité des franges correspond à une longueur de cohérence $L_C \approx c\tau_C$. Pour $\Delta \gg L_C$, l'éclairement devient uniforme car les ondes qui se recouvrent au point d'observation P ont perdues leur relation de phase initiale. L'interférence entre ces deux ondes va alors disparaître.

3.4 Corrélations d'intensité

3.4.1 Définition et principe de la mesure

On définit la fonction de corrélation d'ordre 2 (c'est-à-dire en intensité) par :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\overline{I(t) \cdot I(t + \tau)}}{[\overline{I(t)}]^2}$$

Dans le cas d'une source ponctuelle située à l'infini, cette fonction de corrélation peut être mesurée à l'aide du dispositif représenté sur la figure 7.

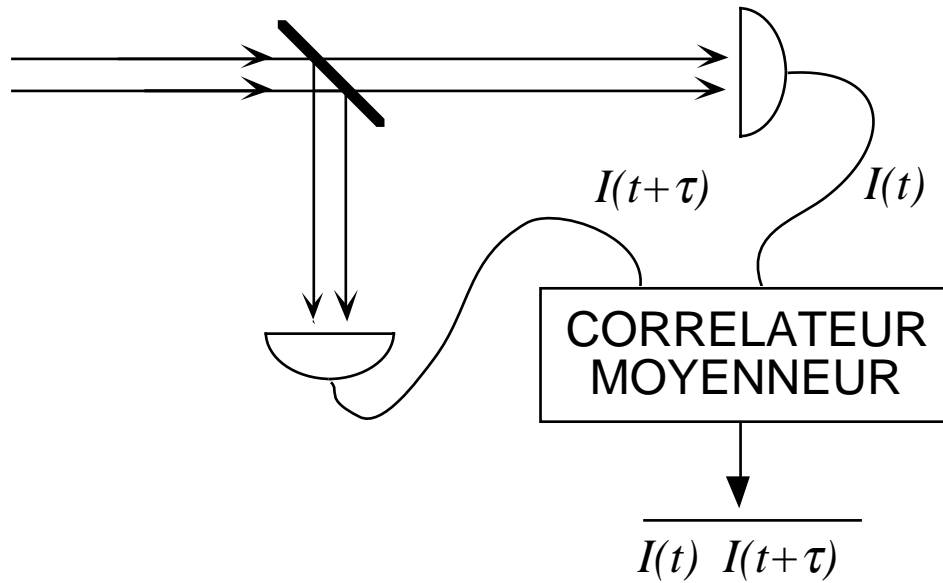


Figure 7: Disposition schématique d'une expérience de corrélations d'intensité.

Le champ est séparé en deux par une lame semi-réfléchissante transmettant la moitié de l'intensité dans chaque voie. On place un détecteur rapide sur chaque faisceau, le temps de réponse devant être nettement inférieur à τ_C . La différence δl des distances des deux détecteurs à la lame séparatrice permet d'introduire un retard variable $\tau = \delta l/c$ entre les instants de détection de l'intensité sur les deux voies. Un corrélateur électronique fait ensuite le produit des deux intensités mesurées, et un moyennneur en prend la valeur moyenne sur un temps de mesure T tel que $T \gg \tau_C$. On obtient ainsi une mesure de $\overline{I(t)I(t + \tau)}$, qu'on normalise ensuite à $[\overline{I(t)}]^2$.

3.4.2 Cas du champ gaussien

Calculons la fonction de corrélation $g^{(2)}(\tau)$ dans le cas de notre modèle de source élargie par collisions. La moyenne à deux temps de l'intensité s'écrit :

$$\overline{I(t)I(t + \tau)} = \overline{\mathcal{S}(t) \mathcal{S}(t + \tau) \mathcal{S}(t)^* \mathcal{S}(t + \tau)^*} \quad (73)$$

soit :

$$\overline{I(t)I(t+\tau)} = \mathcal{S}_0^4 \overline{\sum_{n,m,l,k} e^{-i\varphi_n(t)+i\varphi_m(t)-i\varphi_l(t+\tau)+i\varphi_k(t+\tau)}} \quad (74)$$

Différents cas sont possibles dans cette sommation :

- si $n = m = l = k$ alors $\overline{\dots} = 1$, soit une contribution totale égale à N
- si n, m, l, k sont tous différents alors $\overline{\dots} = 0$
- considérons le cas où au moins deux indices sont égaux :
 - $n = m$
 - * 1^{er} cas : $l \neq k$ alors $\overline{\dots} = 0$
 - * 2^{eme} cas : $l = k$ avec $l \neq n$ alors $\overline{\dots} = 1$ avec $N(N-1)$ termes
 - $n = l$
 - * 1^{er} cas : $m \neq k$ alors $\overline{\dots} = 0$
 - * 2^{eme} cas : $m = k$ avec $m \neq n$ alors $\overline{\dots} = 0$
 - $n = k$
 - * 1^{er} cas : $m \neq l$ alors $\overline{\dots} = 0$
 - * 2^{eme} cas : $m = l$ avec $m \neq n$ et il subsiste alors $N(N-1)$ termes du type $\frac{[\varphi_n(t+\tau) - \varphi_n(t)] - [\varphi_m(t+\tau) - \varphi_m(t)]}{\dots}$

En regroupant ces différents termes, on obtient ainsi :

$$\overline{I(t)I(t+\tau)} = \mathcal{S}_0^4 \left[N + N(N-1) + N(N-1)|g^{(1)}(\tau)|^2 \right] \quad (75)$$

qui s'écrit pour $N \gg 1$:

$$\overline{I(t)I(t+\tau)} = N^2 \mathcal{S}_0^4 \left[1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \right] \quad (76)$$

La fonction de corrélation en intensité est donc donnée par :

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \quad (77)$$

soit, en fonction de l'expression de $g^{(1)}(\tau)$ que nous avons déterminée précédemment (équation (71)) :

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_C} \quad (78)$$

La fonction de corrélation $g^{(2)}(\tau)$ a dans ce cas une "largeur" $\tau_C/2$. Son allure générale se comprend bien intuitivement. Pour $\tau = 0$, nous retrouvons pour $\overline{I(t)I(t+\tau)}$ la valeur $[\overline{I(t)}]^2$ qui pour un champ gaussien vaut $2[\overline{I(t)}]^2$ (soit $g^{(2)}(\tau = 0) = 2$). En effet, lorsqu'on mesure l'intensité à deux instants très rapprochés l'un de l'autre, on obtient à chaque fluctuation positive du champ une contribution au produit des intensités plus importante que le carré de la valeur moyenne de l'intensité. Ceci explique la présence de ce maximum pour $\tau = 0$ qu'on peut interpréter comme un effet de groupement des photons ("bunching" en anglais). Inversement, aux temps τ longs (c'est-à-dire $\tau \gg \tau_C$), la corrélation entre les deux mesures d'intensité a disparu et $\overline{I(t)I(t+\tau)}$ s'écrit simplement $[\overline{I(t)}]^2$ (soit $g^{(2)}(0) = 1$).

Le passage entre ces deux cas limites s'effectuant dans un intervalle de l'ordre de $\tau_C/2$, on peut donc aussi bien mesurer le temps de corrélation du champ par une expérience d'interférence ordinaire (mettant en jeu les corrélations d'amplitude de la vibration lumineuse) que par une telle expérience de corrélations d'intensité.

3.4.3 L'expérience de Hanbury Brown et Twiss

Ce type de mesure a été réalisé pour la première fois par R. HANBURY BROWN et R. Q. TWISS en 1956¹⁵. Le schéma expérimental est décrit sur la figure 8. La lumière émise par un arc à mercure est filtrée spectralement, de façon à conserver uniquement la raie du Hg à 435.8 nm. Le faisceau est ensuite partagé en deux parties égales à l'aide d'une lame séparatrice, puis détecté sur chaque voie par un photomultiplicateur. La chaîne électronique de traitement des photocourants est ensuite identique à celle précisée dans le schéma de principe (fig.7).

Figure 8: Représentation simplifiée du dispositif expérimental de l'expérience de HANBURY BROWN et TWISS, basé sur deux photodétecteurs rapides identiques permet de mesurer des corrélations entre les signaux électriques avec un temps caractéristique inférieur à $\tau_C \simeq 10^{-9}$ s.

Un des deux détecteurs est monté sur une fente dont la position peut être déplacée latéralement par rapport au détecteur fixe. Ceci permet de déplacer les ouvertures des détecteurs par rapport au trou de filtrage placé après la lampe. De façon à s'assurer directement de la réalité de l'effet observé, les deux détecteurs peuvent ainsi être soit superposés, soit séparés spatialement.

Par la suite, nous ne tiendrons pas compte de cet ajustement et nous considérerons une situation idéalisée où les deux détecteurs sont placés symétriquement par rapport à la lame séparatrice, à des distances respectives z_1 et z_2 de la source. En faisant varier la position relative des photomultiplicateurs, cette expérience va permettre de mesurer la fonction de corrélation $g^{(2)}(\tau)$ avec un retard $\tau = |z_1 - z_2|/c$.

□ Influence du temps de réponse des détecteurs

En pratique, il est nécessaire de tenir compte en pratique des temps de réponse finis des deux détecteurs. En moyennant le résultat théorique :

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|t_1-t_2|/\tau_C} \quad (79)$$

sur le temps de réponse τ_R (supposé identique pour les deux photomultiplicateurs), la corrélation observée expérimentalement sera donnée par :

$$\left[\overline{g^{(2)}(\tau)} \right]_R = 1 + \frac{1}{\tau_R^2} \int_0^{\tau_R} dt_1 \int_0^{\tau_R} dt_2 e^{-2|t_1-t_2|/\tau_C} \quad (80)$$

¹⁵R. HANBURY BROWN et R. Q. TWISS, "Correlation between photons in two coherent light rays", *Nature* **177**, 27 (1956)

soit pour l'effet maximum obtenu à $\tau = 0$:

$$\left[\overline{g^{(2)}(\tau)} \right]_R = 1 + \frac{\tau_C^2}{2\tau_R^2} \left[e^{-2\tau_R/\tau_C} - 1 + \frac{2\tau_R}{\tau_C} \right] \quad (81)$$

Pour des détecteurs rapides pour lesquels ($\tau_C \gg \tau_R$), on retrouve :

$$\left[\overline{g^{(2)}(\tau)} \right]_R = 2$$

en accord avec le résultat (77). A la limite opposée des temps de réponse longs ($\tau_R \gg \tau_C$), l'équation (81) donne :

$$\left[\overline{g^{(2)}(\tau)} \right]_R = 1 + \frac{\tau_C}{\tau_R}$$

montrant que l'effet observé est alors très réduit par rapport à sa valeur optimale $g^{(2)}(0) = 2$ ¹⁶.

□ Effet de la cohérence spatiale

Remarquons que ce type d'expérience concerne la cohérence temporelle du second ordre du champ. Néanmoins, l'observation pratique des corrélations d'intensité dépend également de la *cohérence spatiale*, qui est associée aux dimensions finies de la source et des détecteurs.

Pour discuter brièvement l'importance de ces effets, considérons le cas d'une source de dimension finie d perpendiculaire à l'axe de l'expérience. Nous avons vu précédemment que la cohérence spatiale de la vibration lumineuse au niveau des deux détecteurs correspond alors à une zone dont le rayon a est donné par

$$a = \frac{\lambda}{\theta} \quad (82)$$

où θ est le ètre angulaire de la source vu depuis le détecteur. Rappelons que cette dimension a donne une estimation de la taille du détecteur à partir de laquelle les différentes contributions de la source conduiraient à un brouillage de l'effet. Dans l'expérience originale, $\lambda \approx 4 \cdot 10^{-7}$ m et la source lumineuse avait un diamètre angulaire d'environ $\theta \approx 8 \cdot 10^{-5}$ rad vu depuis les détecteurs. En utilisant des détecteurs dont le diamètre est de 5 mm, on voit que la cohérence spatiale spatiale de la vibration lumineuse n'induit qu'une faible réduction de l'effet observé. Dit de façon différente, l'ensemble de ces paramètres correspond à une situation où il n'existe qu'un seul mode spatial – ou un grain de speckle – entre la source et le détecteur. Le détecteur peut alors effectivement “voir” les effets de cohérence temporelle à l'intérieur de ce mode spatial.

L'expérience de HANBURY BROWN et TWISS était néanmoins centrée sur des effets de cohérence spatiale. Quand on augmente la séparation spatiale des deux détecteurs (c'est-à-dire en déplaçant la fente placée devant un des photomultiplicateurs), la corrélation de photocourants va disparaître au-delà d'une distance qui est également donnée en ordre de grandeur par $a = \lambda/\theta$. Une telle expérience permet donc de mesurer directement le diamètre angulaire θ de la source ! L'expérience de laboratoire illustrée sur la fig.?? était en fait le prototype d'un dispositif destiné à mesurer le diamètre apparent des étoiles (figure ??). En comparaison avec l'interféromètre stellaire de MICHELSON et PEASE, l'avantage de cette méthode est que la séparation spatiale entre les deux photodétecteurs peut être a priori aussi grande que souhaitée, car il n'est plus nécessaire de contrôler cette distance à une fraction de longueur d'onde optique près. Dans le corrélateur d'intensité, la phase des ondes qui arrive sur les détecteurs devient sans importance et il est même possible d'utiliser des miroirs de télescope de faible qualité optique.

¹⁶E. M. PURCELL, “The question of correlation between photons in coherent light rays”, *Nature* **178**, 1449 (1956).

Un tel instrument fut installé par HANBURY BROWN et TWISS dans le désert australien (figure 9) à la fin des années cinquante. Il permit de résoudre la taille angulaire d'étoiles dont le diamètre angulaire apparent était aussi petit que $0.0005''$ d'arc¹⁷. Cette méthode très séduisante resta malheureusement limitée à l'observation d'objets très lumineux, et elle fut abandonnée dans les années soixante-dix.

Figure 9: Vue aérienne de l'interféromètre stellaire de l'Observatoire de Narrabri, dans le bush australien.

¹⁷Rappelons à titre de comparaison, que celui de Betelgeuse est de $0.047''$ d'arc.