

## Département de physique

# Acquisition et analyse FFT

- Rédaction du cours et travail expérimental associé :

Jean-Baptiste Desmoulin (P.R.A.G.)  
mail : [desmouli@physique.ens-cachan.fr](mailto:desmouli@physique.ens-cachan.fr)

L'objectif de ce cours est de présenter quelques notions générales sur l'acquisition de données sur un oscilloscope, notamment de présenter les notions de quantification en temps (échantillonnage), de quantification en amplitude et de capacité mémoire. Ces notions sont ensuite utilisées pour mieux comprendre les caractéristiques de l'analyse de Fourier rapide (FFT) sur les oscilloscopes. La FFT est finalement utilisée pour étudier les caractéristiques d'un diapason de plusieurs façons ce qui permet de manipuler les concepts énoncés précédemment dans un contexte plus complexe.

### I. Instrumentation numérique : échantillonnage, troncation, capacité de mémoire.

#### I.1. Présentation de ces notions :

Dans un appareil numérique, l'image du signal analogique récupéré est stockée dans une mémoire. Un signal analogique comporte une infinité de points. Pour arriver à un nombre de points fini, on ne va prendre que des points à intervalle de temps régulier (échantillonnage) et sur une durée limitée (troncation). On pourra ainsi se ramener à un nombre de points fini.

La valeur analogique de la tension récupérée pour chaque point sera ensuite transformée en un code binaire, une succession de 0 et de 1, appelés bits. Sur les oscilloscopes, la numérisation est faite en général sur  $n=8$  bits. Par exemple, si on associe à un point de tension acquis le code 10101100, en valeur entière, il s'agit du niveau  $N_u = 1x2^0 + 0x2^1 + 1x2^2 + 0x2^3 + 1x2^4 + 1x2^5 + 0x2^6 + 0x2^7 = 53$

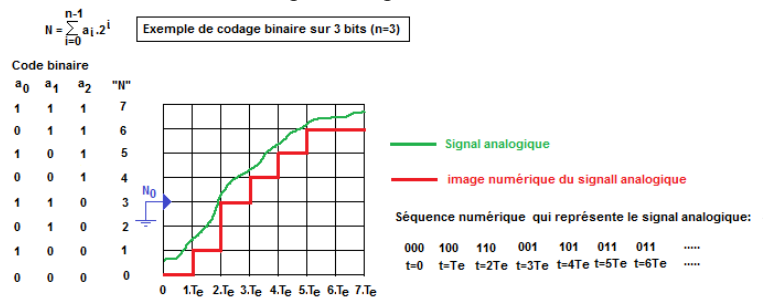
En représentant chaque point par une série de 0 et de 1 de taille limitée et en travaillant avec un nombre de points fini, on peut stocker l'image numérique du signal dans une mémoire.

Pour recalculer la tension à laquelle correspond ce code, il est nécessaire de connaître le nombre entier associé au code de la position du niveau 0 d'amplitude  $N_0$  et le nombre entier associé au code binaire associé à la tension  $N_u$  ainsi que la dynamique  $D$  (nombre de Volts de la plage d'observation de la tension = nombre de carreaux max multiplié par le nombre de V par carreau). Le niveau de tension correspondant est alors obtenu par la formule

$$u = (N_u - N_0) \frac{D}{2^n}$$

Remarque : certains oscilloscopes affichent 8 carreaux et numérisent sur 8 carreaux (DSO5012A et DSOI6012A) mais d'autres affichent 8 carreaux mais numérisent sur 10 carreaux (DSOX3014).

Pour résumer ce qui se passe quand on numérise un signal analogique, on peut se baser sur la figure suivante sur laquelle la numérisation est faite sur 3 bits pour simplifier.



Pour passer du code à une tension  $u$  :  $u = (N - N_0) \times \frac{D}{2^n}$  où  $N_0$  Valeur entière correspondant au code de la masse  
 $n$  = nombre de bits sur lequel on code la tension  
 et  $D$  = dynamique de numérisation  
 (exemple : si 8 carreaux en amplitude, si échelle = 1V/Carreau alors  $D = 8V$ )

## I.2. Conséquence sur l'utilisation temporelle de l'oscilloscope:

Le fait de transformer le signal analogique en une image numérique n'est pas sans conséquence sur la qualité de l'image récupérée. Cette transformation introduit forcément une dégradation de la qualité de l'information, l'image n'étant jamais parfaitement fidèle au signal original. Il faudra donc paramétrer son appareil afin de limiter les défauts liés à la numérisation.

### I.2.1. Relation entre la profondeur mémoire et la fréquence d'échantillonnage.

On rencontre des oscilloscopes numériques avec des capacités mémoires très différentes.

• Certains ont des capacités limitées (1000 points pour les Agilent54600, 2500 sur les TDS210, 4000 sur les DSO3000...) et la profondeur mémoire disponible est alors figée. Quelle que soit la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  ( $T_e=1/F_e$  est la pas d'échantillonnage), le nombre de points stockés en mémoire  $N$  est fixé à  $N_{max}$ . Si le signal a été acquis sur une durée  $T_o$  (fixée avec le bouton de base de temps), alors, on aura

$$N_{max} = \frac{T_o}{T_e} = T_o \cdot F_e$$

Dans ce cas, la fréquence d'échantillonnage s'ajuste automatiquement en fonction du réglage de base de temps de l'oscilloscope

• Pour des oscilloscopes de capacité mémoire plus importante (8 Mpts sur les DSO6012A, 500kpts ou 8Mpts sur les DSO5012A, 4Mpts sur les DSOX3014A), la relation entre  $T_o$ ,  $F_e$  et  $N$  est un peu plus complexe.

Pour des durées d'acquisition longues (fortes valeurs de  $T_o$ ), on retrouve le cas précédent.  $N$  reste fixé à  $N_{max}$ , la valeur maximale possible et  $F_e$  s'ajuste en fonction de la valeur de  $T_o$  choisie.

Si  $T_o$  diminue (acquisition sur des durées de plus en plus courtes),  $F_e$  augmente.  $N$  étant plus important que pour le cas précédent,  $F_e$  prend plus rapidement des valeurs élevées quand  $T_o$  augmente. Or la valeur de  $F_e$  est limitée (2GSa/s pour les DSO6012A et les DSO5012A et 4GSa/s pour les DSOX3014A). Dès que  $F_e$  atteint  $F_{e,max}$ ,  $N$  diminue. Dans ce cas, le nombre de points pour représenter le signal est variable et évolue avec la base de temps. Plus on observe une durée courte, moins on a de points. C'est la fréquence d'échantillonnage qui reste figée à  $F_{e,max}$  et on a

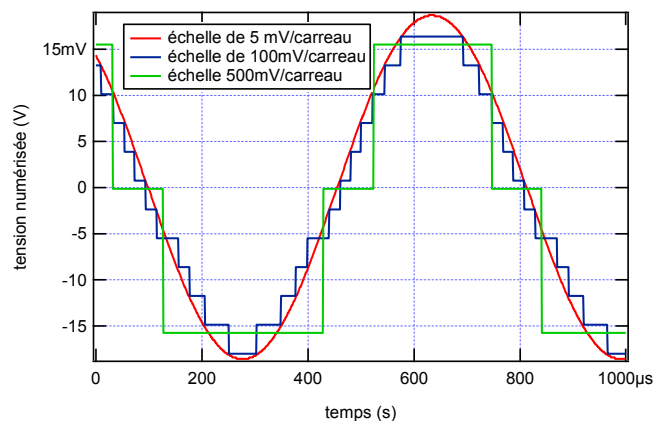
$$N = T_o \cdot F_{e,max}$$

### I.2.2. La quantification en amplitude.

Chaque tension récupérée étant transformée en un code binaire, et le nombre de codes possibles pour une taille de mot binaire étant limité, seuls certains niveaux de tensions peuvent être représentés numériquement. Les valeurs de tensions intermédiaires seront alors confondues avec la valeur numériquement représentable juste supérieure, ou juste inférieure, suivant le protocole de numérisation choisi.

Il est essentiel, pour que la numérisation soit optimale de faire en sorte que le maximum de codes possibles soient utilisés. Pour ça, à l'oscilloscope, il faut ajuster le bouton d'amplitude afin d'utiliser toute la dynamique de l'appareil.

Nous allons illustrer ce problème sur la figure suivante. La tension qui représente un échantillon ne peut prendre que des valeurs discrètes. Une tension est associée à un code, et le nombre de codes possibles étant fixé, un échantillon ne peut prendre que des valeurs discrètes de tension. En se plaçant dans le cas d'un faible nombre de codes possibles, et en supposant que la tension analogique est représentée par le niveau de tension autorisé immédiatement inférieur, on se retrouve avec une représentation numérique du signal analogique qui présente une forme continue par morceau. Ainsi, suivant l'échelle de numérisation choisie, pour le même signal, l'oscilloscope récupère l'image suivante du signal :



Sur la courbe de l'échelle 5mV par carreau, le signal occupait les 8 carreaux d'amplitude et donc les 256 niveaux possibles de représentation. L'effet « continu par morceau » existe mais n'est pas visible. En revanche pour les échelles 100mV/Carreau et 500mV par carreau, la courbe apparaît tassée vers le centre de l'écran et on utilise moins de 1 carreau de l'échelle d'amplitude. Ainsi, seuls quelques codes sont utilisés (12 sur l'échelle 100mV/carreau et 3 sur l'échelle 500mV/carreau). L'effet « continu par morceau » est alors de plus en plus visible et on comprend bien que les mesures faites sur de telles images du signal ne seront pas correctes.

*Remarque :* Sur les oscilloscopes DSO5012A et DSO6012A, la numérisation se fait sur 8 bits, mais lorsqu'on est en mode d'acquisition « Average » ou « High Resolution », un lissage et une interpolation permettent d'obtenir une représentation sur 12 bits (au maximum). Cette étape est purement esthétique, et l'information entre les pas de quantification sur 8 bits est perdue. Cette opération ne permet donc nullement d'obtenir le même effet qu'une numérisation qui se ferait sur 12 bits.

En mode d'acquisition « Normal », la représentation est sur 8 bits et aucun traitement n'est effectué, car le bruit rend cette opération sans intérêt.

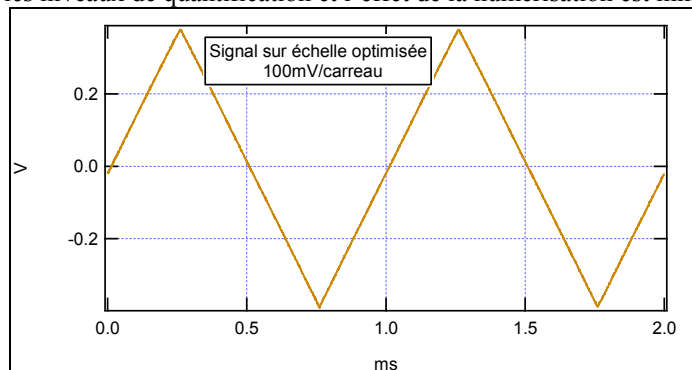
### 1.2.3. Etude expérimentale du bruit de quantification.

On observe le même signal triangulaire d'amplitude 790mV pic à pic et de fréquence 1 kHz sur les deux voies d'un oscilloscope. Pour la première, on adopte une représentation qui utilise au maximum les 256 niveaux de quantification de l'appareil. Sur la voie 2 on adopte différentes échelles en augmentant le pas de quantification ce qui revient à dégrader la qualité de la numérisation et à augmenter le bruit de quantification, différence entre le signal analogique et son image numérique. On utilisera ensuite la soustraction des voies de l'oscilloscope que l'on observera et qu'on étudiera quantitativement.

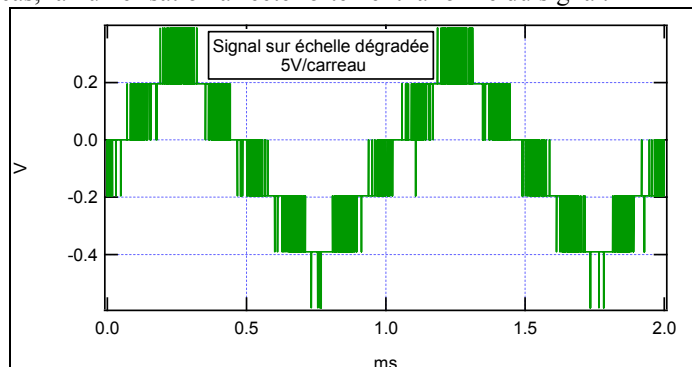
Le bruit observé résulte du bruit de quantification, mais aussi des autres causes de bruit rencontrés dans les circuits électroniques. On va supposer que le bruit de quantification est dominant dans la valeur efficace.

Pour l'observation du bruit quand on change d'échelle sur la voie 2, on va voir apparaître des composantes continues, conséquence d'une mauvaise référence à zéro des voies d'oscilloscope. C'est une faiblesse des oscilloscopes en terme d'appareil de mesure. Pour limiter l'incidence de ce défaut qui n'a rien à voir avec le bruit de quantification, on va mesurer la valeur moyenne et la valeur efficace de la différence des deux voies. On en déduira la valeur efficace de la seule fluctuation (signal à qui on a retranché sa valeur moyenne) en prenant la racine carrée de la différence de carré de la valeur efficace et du carré de la valeur moyenne. Certains oscilloscopes donnent directement la valeur efficace de la variation.

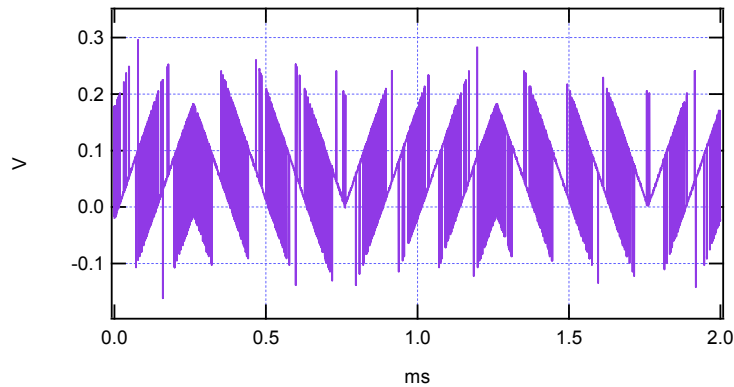
Dans le cas où notre signal triangulaire de 790mV d'amplitude, avec une échelle de 100mV par carreau, on utilise pratiquement tous les niveaux de quantification et l'effet de la numérisation est minimal.



Le même signal observé avec une échelle de 5V par carreau n'utilise plus que quelques niveaux de quantification et dans ce cas, la numérisation affecte fortement la forme du signal.

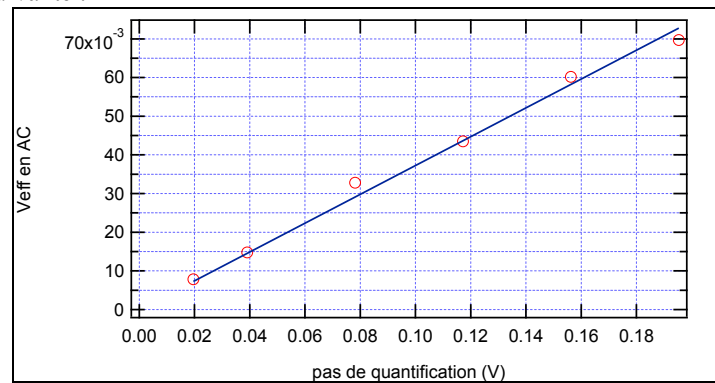


La différence entre ces deux signaux est de la forme suivante :



La valeur efficace de ce signal évolue avec le pas de quantification en tension. Moins l'échelle est adaptée et plus le pas est grand relativement à la valeur du signal et donc plus le bruit de quantification est important. Ce signal n'est pas strictement le bruit de quantification puisque les autres causes de bruit provoquent des changements de niveau par rapport au bruit de quantification.

Si on ne prend en compte que la valeur efficace de l'ondulation de ce signal en fonction du pas de quantification, on obtient l'évolution suivante :



On a bien une augmentation de la valeur efficace du bruit avec le pas de quantification.

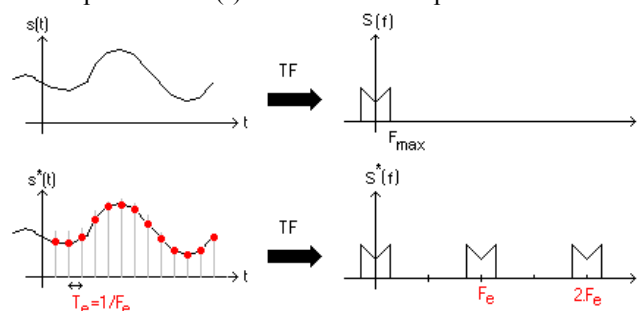
## II. Spécificités de la FFT sur un oscilloscope.

### II.1. Notions essentielles sur l'analyse FFT:

Les oscilloscopes numériques disposent en général d'un module d'analyse spectrale FFT. Les opérations de numérisation (échantillonnage, troncation) vont avoir des conséquences sur le spectre obtenu.

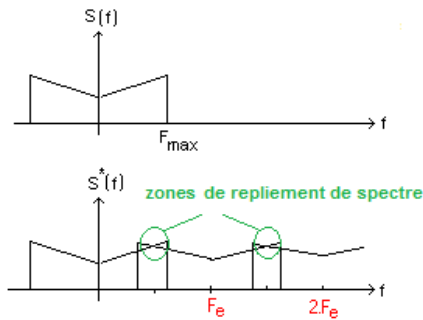
#### II.1.1. Effet de l'échantillonnage seul sur une FFT.

Considérons un signal analogique  $s(t)$  dont le spectre est  $S(f)$  et le même signal, échantillonné à la fréquence d'échantillonnage  $F_e$ ,  $s^*(t)$  dont le spectre est  $S^*(f)$ . Les formes des spectres sont alors les suivantes :



On constate que si  $F_e > 2F_{\max}$  ( $F_e - F_{\max} > F_{\max}$ ), il suffira de travailler avec une fenêtre d'observation assez restreinte (comprise entre  $F_{\max}$  et  $F_e - F_{\max}$ ) et le spectre observé sera le même avec et sans échantillonnage.

En revanche, si  $F_e < 2F_{\max}$ , on constate que les différents éléments se chevauchent ce qui interdit de pouvoir récupérer une image correcte du spectre... On parle de **repliement de spectre**.

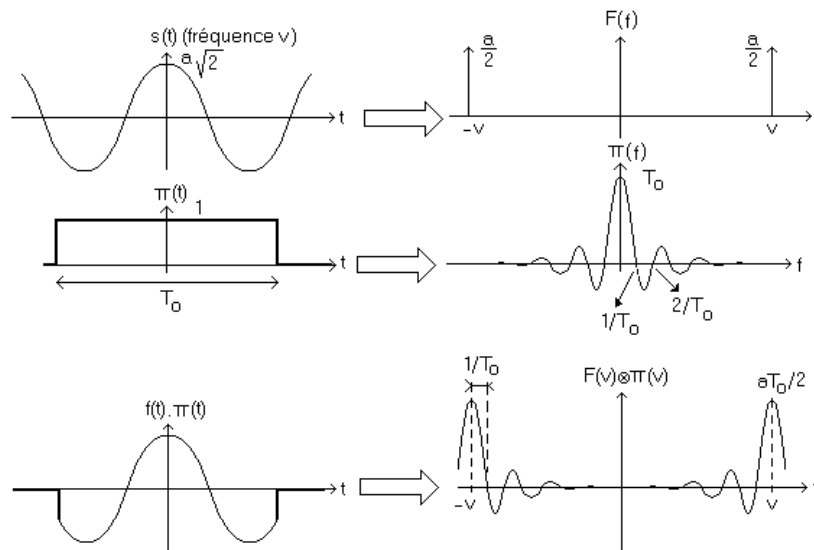


Pour pouvoir s'affranchir du problème de repliement, il faut donc que  $F_e > 2F_{\max}$ , c'est le théorème de **Shannon**.

*Remarque :* bon nombre de signaux périodiques ont un spectre non borné (triangles, créneaux...). Dans ce cas il y aura toujours repliement, mais essentiellement pour les harmoniques de rang élevé (qui sont souvent noyés dans le bruit). En pratique, la limite supérieure du spectre peut par exemple correspondre aux fréquences au-delà desquelles on ne peut plus distinguer le spectre du signal étudié du bruit... Il faut noter que le bruit vu dans la bande passante de l'appareil va aussi se replier.

### II.1.2. Effet de la troncation seule sur une FFT.

Si on travaille avec une sinusoïde (ou une raie quelconque d'un spectre), le fait de tronquer le signal temporel  $s(t)$  de départ va transformer la raie initiale en un sinus cardinal. On pourra toujours déduire l'amplitude des raies du sinus cardinal, mais la résolution en fréquence est bien entendu altérée. On constate que plus la fenêtre de troncation sera large plus la raie centrale sera fine.



Pour le calcul d'une FFT, la fenêtre choisie n'est pas forcément rectangulaire. Il existe beaucoup de formes de fenêtres dont on choisira le profil afin d'obtenir une transformée de Fourier avec une forme optimale en fonction de ce que l'on veut faire. On trouve des fenêtres qui donnent des pics assez fins (rectangulaire, hanning...) ce qui est intéressant quand on veut résoudre en fréquence (observer deux fréquences proches dans un spectre). On trouvera des fenêtres qui donnent au contraire des pics larges ce qui est intéressant pour obtenir une estimation satisfaisante de l'amplitude du pic. Nous traiterons ces aspects dans le paragraphe sur la FFT à l'oscilloscope.

### II.1.3. Echantillonnage et troncation dans le cas simple d'une sinusoïde en FFT.

Si on réalise en même temps l'échantillonnage et la troncation d'une sinusoïde, le spectre obtenu aura l'allure du spectre du paragraphe II.1.2 périodisé tous les  $F_e$  comme indiqué au paragraphe II.1.1.

Cependant, comme en temporel, le spectre ne peut pas être représenté par un nombre de points infini. Il va donc falloir échantillonner également en fréquence, ce qui signifie que le spectre sera calculé avec un pas  $\Delta F$  régulier dont nous verrons plus loin qu'il dépend de la durée d'acquisition.

## II.2. Spécificités de la FFT sur les oscilloscopes.

### II.2.1. Nombre de points utilisés pour calculer une FFT.

Sur un oscilloscope le nombre de points  $N_{FFT}$  utilisés pour représenter un signal en vue de la FFT est une constante quelle que soit la base de temps (1000 pour les oscilloscopes Agilent DSO5012A, DSO6012A et HP546xx, 2048 pour les TDS210, un peu plus de 62000 sur les DSOX3014A...). Sur les oscilloscopes à faible profondeur mémoire (qq kpts), il s'agit du nombre de points numérisés pour la représentation temporelle  $N_{max}$ . Sur les oscilloscopes à grande profondeur mémoire (kk 100kpt), la FFT est calculée sur un nombre de points plus faible que ce qui est acquis pour la représentation temporelle et alors  $N_{FFT} < N_{max}$ . Un sous échantillonnage est donc réalisé sur les données accessibles en mémoire. Si on réalise cette opération, c'est pour des questions de taille mémoire disponible, mais aussi pour des questions de vitesse de rafraîchissement du spectre. On constate par exemple que les DSOX3014A qui fonctionnent en FFT avec plus de 62000 points ont un spectre qui se rafraîchit moins vite que sur les DSO6012A et DSO5012A qui ne calculent la FFT qu'avec 1000 points. En effet dans ce cas, pour la même fréquence d'échantillonnage, le fait d'acquérir plus de point permet d'acquérir le signal plus longtemps. Il est donc plus long d'avoir le résultat.

Nous noterons  $N_{FFT}$  le nombre de points en temporel, utilisés pour calculer le spectre FFT. Le signal est observé sur une durée  $T_o$  fixée avec le bouton de base de temps. L'échantillonnage pour la FFT est alors réalisé à la fréquence  $F_{eFFT} = 1/T_{eFFT}$  qui sera donc parfois différent de  $F_e$ . Ces trois paramètres sont liés :

$$N_{FFT} = T_o \cdot F_{eFFT}$$

Dans la mesure où l'on dispose d'un bouton de base de temps, puisque  $N_{FFT}$  est fixé, il n'y a pas de réglage de la fréquence d'échantillonnage. Ce paramètre est fixé implicitement par l'oscilloscope en fonction de la base de temps choisie.

### II.2.2. Caractéristiques essentielles du spectre FFT.

- Le spectre est calculé avec  $N_{FFT}/2 + 1$  points, sur une plage de fréquence allant de 0 à  $F_c/2$ .
- Le pas de calcul en fréquence  $\Delta F$  (écart de fréquence entre deux points successifs du spectre) est donc tel que

$$\Delta F = \frac{F_{eFFT}/2}{N_{FFT}/2} = \frac{1}{T_o}$$

### II.2.3. Compromis à trouver entre le respect du critère de Shannon et la résolution spectrale.

Pour respecter le critère de Shannon, il faut que  $F_{eFFT} > 2F_{max}$  si  $F_{max}$  est la plus grande fréquence du spectre pour laquelle on a de la puissance, ce qui signifie qu'il est nécessaire d'avoir une durée d'observation  $T_o$  assez faible.

Pour obtenir un spectre avec suffisamment de points dans la zone à étudier, c'est-à-dire avec un pas de calcul en fréquence  $\Delta F$  assez faible, il faut au contraire une faible fréquence d'échantillonnage et donc une durée d'observation  $T_o$  assez importante.

**On constate que les deux impératifs précédents s'opposent. Pour observer un spectre convenable, il va donc falloir respecter le critère de Shannon mais sans travailler avec un  $F_{eFFT}$  trop fort pour conserver une bonne résolution du calcul spectral. Ce compromis n'est pas toujours possible.**

### II.2.4. Pourquoi une échelle log de représentation du spectre ?

L'échelle de la réponse en amplitude est en dB. La valeur en dB (notée LdB) est reliée à la valeur efficace recherchée par la relation suivante :

$$LdB = 20 \cdot \log(V_{eff}/V_0) \quad \text{où } V_0 \text{ vaut 1 Volt efficace}$$

Pour estimer précisément la hauteur d'une raie, nous verrons qu'il est intéressant de dilater les échelles (zoom en fréquence et en amplitude), de choisir une fenêtre de pondération adaptée, et de travailler avec les deux curseurs d'amplitude ce qui nous donnera un encadrement de la valeur obtenue...

L'intérêt de l'échelle log en amplitude, c'est de mieux représenter les harmoniques de poids faible qui seraient difficiles à distinguer du zéro en échelle linéaire...

A titre indicatif, si on représente deux grandeurs à l'écran l'une étant 100 fois plus grande que l'autre, en échelle linéaire, si la plus grande est représentée pleine échelle sur 256 niveaux (numérisation sur 8 bits), la plus faible ne sera représentée que sur 2 niveaux, alors qu'en échelle log, on aura seulement perdu 40 dB.

Si le rapport avait été 1000, en échelle linéaire, il n'y avait plus de niveau de représentation alors qu'en échelle log, on aurait perdu 60 dB.

### II.2.5. Choix des fenêtres de troncation.

Dans la pratique, on n'utilise les fenêtres rectangulaires que pour étudier le spectre de phénomènes transitoires. Dans le cas de signaux périodiques, on va plutôt chercher des fenêtres à bords moins abrupts ce qui va avoir des conséquences sur l'allure des raies obtenues.

Pour avoir une bonne représentation en amplitude, on utilisera de préférence les fenêtres « flattop » car elles conduisent à des raies assez bombées au voisinage du maximum, ce qui permet d'obtenir un repérage plus fiable de sa valeur.

Pour avoir une bonne résolution en fréquence (possibilité de séparer deux raies proches), on préférera les fenêtres de type « hanning » qui conduisent à des raies un peu plus fines, ou même plutôt rectangulaires...

A titre d'exemple, voici l'expression temporelle de différentes fenêtres, ainsi que leur représentation temporelle et spectrale :

- Fenêtre rectangulaire :

si  $|t| \leq T_0/2$ ,  $\text{Rect}(t) = 1$  et si  $|t| > T_0/2$ ,  $\text{Rect}(t) = 0$

- Fenêtre de Hann (dite de Hanning) :

si  $|t| \leq T_0/2$ ,  $H(t) = 0,5 \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot t / T_0))$  et si  $|t| > T_0/2$ ,  $H(t) = 0$

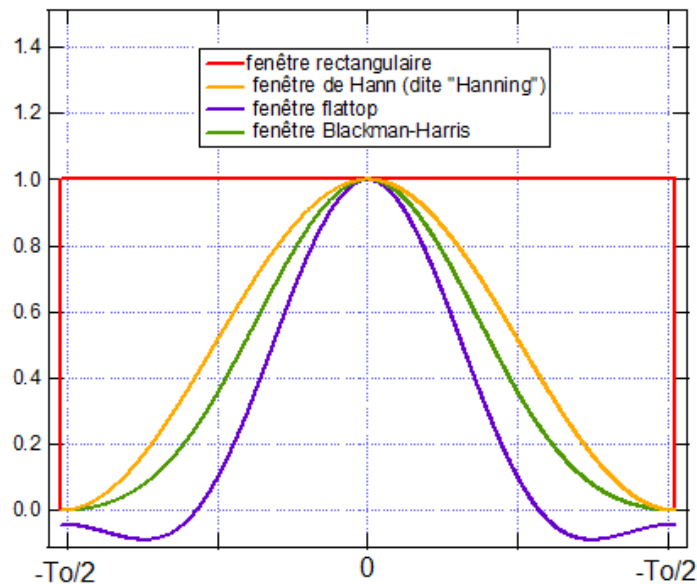
- Fenêtre de Blackman-Harris :

si  $|t| \leq T_0/2$ ,  $BH(t) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos(2\pi \cdot t / T_0) + 0,08 \cdot \cos(4\pi \cdot t / T_0)$  et si  $|t| > T_0/2$ ,  $BH(t) = 0$

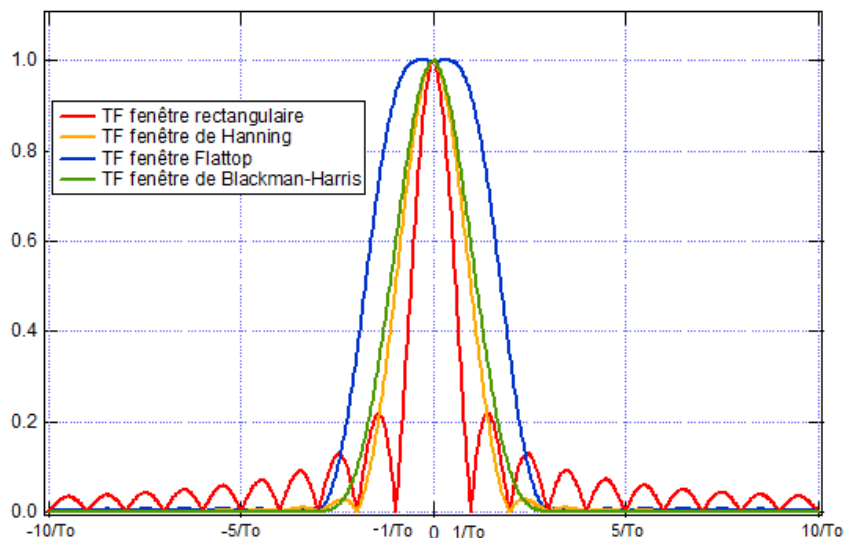
- Fenêtre Flattop :

si  $|t| \leq T_0/2$ ,  $F(t) = 0,281 + 0,521 \cdot \cos(2\pi \cdot t / T_0) + 0,198 \cdot \cos(4\pi \cdot t / T_0)$  et si  $|t| > T_0/2$ ,  $F(t) = 0$

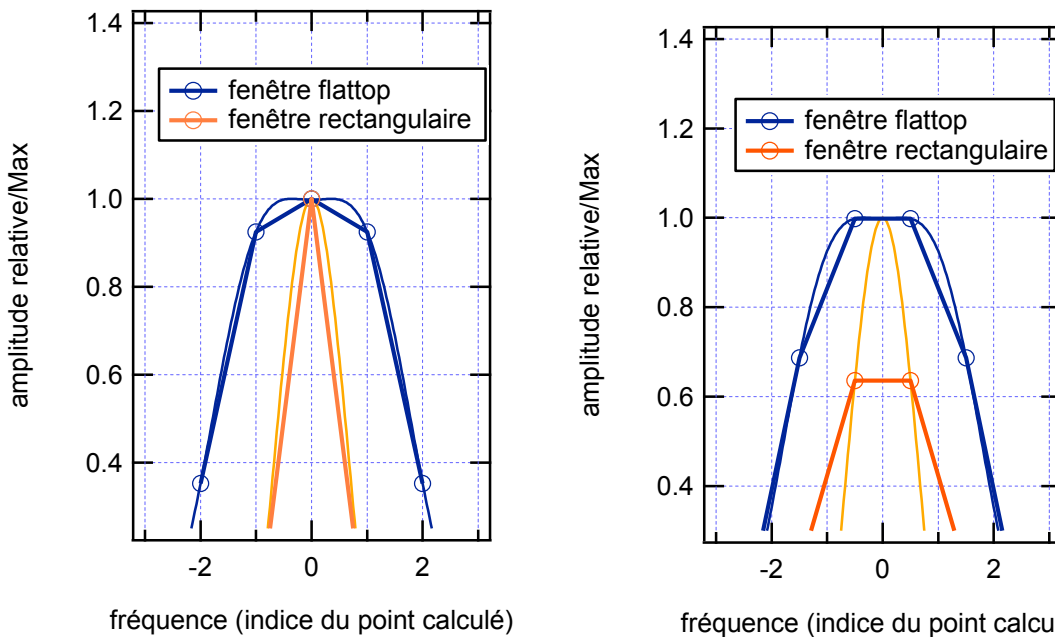
- Les allures sont données sur la figure suivante :



La transformée de Fourier de ces fenêtres conduit aux spectres suivants :



Pour illustrer ce problème du choix des fenêtres, on peut s'inspirer des deux figures suivantes, sur lesquelles on présente simultanément, en échelle linéaire le sommet d'une raie spectrale avec une fenêtre de type flattop et une fenêtre rectangulaire. Sur la figure de gauche, on a la chance de calculer un point exactement à la fréquence du pic. Sur celle de droite, on calcule un point un peu avant et un peu après, mais pas exactement à la fréquence du pic.



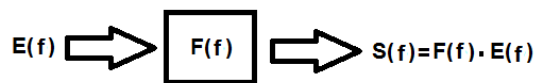
Sur la seconde, on voit que l'amplitude du sommet est correctement représentée avec la fenêtre flattop, mais qu'elle est fortement faussée avec la fenêtre rectangulaire. Statistiquement, on se retrouvera entre les deux situations extrêmes présentées, ce qui signifie qu'avec une fenêtre rectangulaire, l'erreur systématique de sous-estimation de l'amplitude du pic peut être assez importante.

### **III. Utilisation de la FFT pour obtenir une fonction de transfert.**

Exemple d'application : Recherche de la fonction de transfert d'un diapason par plusieurs méthodes en utilisant la FFT.

#### **III.1. Obtention d'une fonction de transfert par transformée de Fourier d'une réponse impulsionnelle.**

On considère un système linéaire présentant une entrée  $e(t)$  et une sortie  $s(t)$ . Si on représente le système en échelle fréquentielle, on se retrouve dans la configuration suivante :



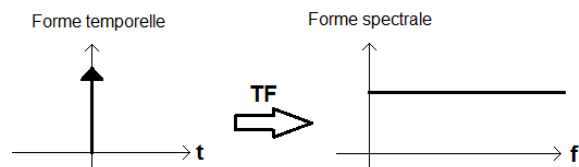
En entrée, le signal est impulsionnel, de la forme  $e(t) = A \cdot \delta(t)$ . Sa transformée de Fourier est  $E(f) = A$ . La fonction de transfert du système linéaire est  $F(f)$ . En sortie de ce dernier, on récupère un signal  $s(t)$  dont la transformée de Fourier est  $S(f) = A \cdot F(f)$ . Le spectre du signal de sortie correspond donc, un à facteur multiplicatif réel près, à la fonction de transfert du système linéaire.

En pratique, on ne réalise pas exactement une impulsion de Dirac. Pour limiter les effets liés à la forme de l'impulsion, on calculera, quand c'est possible, la fonction de transfert en faisant le rapport entre la transformée de Fourier de la sortie et la transformée de Fourier de l'entrée.

#### **III.2. Mise en place du système d'analyse pour l'électronique (macro sous Igor).**

L'intérêt d'une impulsion de Dirac, c'est qu'elle envoie autant d'énergie sur toutes les fréquences de 0 à l'infini. On peut ainsi, en un seul essai, connaître le comportement du système, quelle que soit la fréquence de sollicitation.

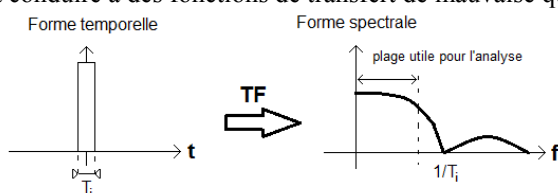




Malheureusement, on ne sait pas réaliser un tel signal. On peut seulement approcher sa forme en réalisant un signal rectangulaire d'amplitude la plus grande possible et de durée la plus faible possible, devant les temps caractéristiques du système étudié. Ce type de signal permettra de simuler une impulsion jusqu'à une fréquence qui sera d'autant plus grande que l'impulsion sera courte.

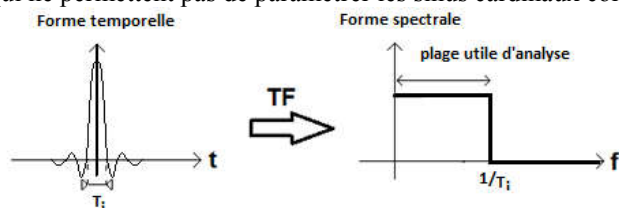
- *Choix des caractéristiques de l'impulsion :*

L'impulsion peut être rectangulaire, de durée  $T_i$ . Dans ce cas, la transformée de Fourier conduit à un sinus cardinal dont la première annulation surviendra à  $1/T_i$  (Cf propriétés du Sinc). On enverra donc l'essentiel de la puissance du signal sur une plage de fréquence légèrement inférieure à  $1/T_i$ . La largeur de la plage sur laquelle on est susceptible de récupérer la fonction de transfert avec un niveau de signal suffisant est donc directement liée à la largeur de l'impulsion. Des impulsions courtes conduisent à des plages plus élevées, mais aussi à des niveaux de signaux moindres ce qui peut conduire à des fonctions de transfert de mauvaise qualité.



Par ailleurs, le signal impulsionnel présente une période de répétition  $T$ . Il faudra acquérir la réponse impulsionnelle sur une fraction de  $T$ . On notera  $T_0$  cette durée.  $T_0$  fixera directement le pas de calcul en fréquence de la FFT à  $1/T_0$  (Cf généralités sur la FFT). Ainsi, en analysant sur une plage dont la largeur est de l'ordre de  $1/T_i$ , sachant que l'on calculera le spectre avec des points pris tous les  $1/T_0$ . Le nombre de points pour représenter la fonction de transfert sera donc de l'ordre de  $N_{FT} = T_0/T_i$  (en fait un peu moins, car l'analyse ne sera conservée, avec la macro sous Igor, que sur 80% de  $1/T_i$ , pour éviter d'avoir des signaux trop bruités)

L'impulsion peut également avoir une forme de sinus cardinal (première annulation à  $T_i$ ). L'intérêt est que le spectre d'un sinus cardinal est un rectangle, ce qui permettra d'envoyer une puissance équivalente sur toutes les fréquences, sur une plage allant de 0 à  $1/T_i$ . Si on fait le rapport entre le spectre de la sortie et le spectre de l'entrée du système, on aura un résultat équivalent au cas précédent. Cette option n'est possible qu'avec des impulsions obtenues avec des générateurs 33220A. Elle n'est pas opérationnelle sur les générateurs numériques intégrés aux oscilloscopes DSOX3014A qui ne permettent pas de paramétrer les sinus cardinaux correctement.



- *Choix de la fenêtre de troncation pour le calcul de la FFT :*

Pour des questions esthétiques, on a choisi de placer l'impulsion à gauche de l'écran et d'enregistrer dans ces conditions. La réponse du système va alors présenter l'essentiel de sa puissance sur le bord gauche de la fenêtre d'acquisition. Il faut donc impérativement utiliser une fenêtre rectangulaire, sinon, avec les autres fenêtres dont les bords partent de zéro ou de valeurs proches de zéro pour monter très progressivement, on va pratiquement annuler la réponse après fenêtrage, ce qui conduira à un résultat inexploitable.

- *Application à l'étude d'un filtre passe-bas de second ordre en fonction du facteur de qualité.*

Nous allons étudier un filtre passe bas du second ordre de type RLC avec une capacité de quelques 100nF, une inductance de quelques 10mH (et une résistance résiduelle de qq  $\Omega$ ) et une résistance variable (boîte à décade).

Le système a une fréquence de coupure voisine du kHz. On va donc chercher à étudier la fonction de transfert jusqu'à 10kHz environ.

On choisira donc une largeur d'impulsion voisine de 100 $\mu$ s avec une impulsion de préférence en sinus cardinal.

La durée d'acquisition sera prise 100 fois supérieure environ à la largeur d'impulsion pour récupérer environ 100 points sur le diagramme de Bode.

### III.3. Etude de la fonction de transfert du diapason dans plusieurs contextes .

Dans ce cas, on n'a pas besoin de la macro dont l'intérêt est avant tout de générer une impulsion de tension. Dans ce cas, l'impulsion peut être purement mécanique en frappant un bras du diapason

#### III.3.1. Enoncé du problème.

Le diapason est un filtre passe bande. On supposera que sa fréquence centrale vaut  $f_c$  et que son facteur de qualité vaut  $Q$ .

Pour que la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle qui donne la fonction de transfert soit satisfaisante, il faut calculer suffisamment de points dans la bande passante  $\Delta f$  du filtre qui vaut

$$\Delta f = f_c / Q$$

Pour que la transformée de Fourier nous convienne, il faut donc que

$$\Delta F \ll \Delta f \quad \text{ou encore} \quad 1/T_o \ll f_c / Q \quad (1)$$

Par ailleurs, il faut respecter le critère de Shannon, ce qui signifie que le spectre doit être calculé avec

$$F_{\text{eFFT}}/2 > f_c \quad (2)$$

AN : Supposons que  $f_c = 440 \text{ Hz}$  ;  $Q = 5000$

(2) impose que  $F_{\text{eFFT}} > 2 \times 440 \text{ Hz} = 880 \text{ Hz}$ . On s'imposera  $F_{\text{eFFT}} > 1000 \text{ Hz}$ . Il faudra donc prendre assez de points dans les pseudo-périodes du signal observé.

(1) impose que  $1/T_o \ll 440/5000$  ce qui signifie qu'il nous faut  $1/T_o \ll 1/10$  environ. On prendra  $T_o \gg 10 \text{ s}$ . Cette relation signifie qu'il faudra observer le signal assez longtemps pour pouvoir juger correctement la décroissance de l'amplitude des pseudo-oscillations.

En regroupant les deux inégalités précédentes, on trouve que la FFT sera correcte à condition de disposer d'un nombre  $N_{\text{maxFFT}}$  de points tel que

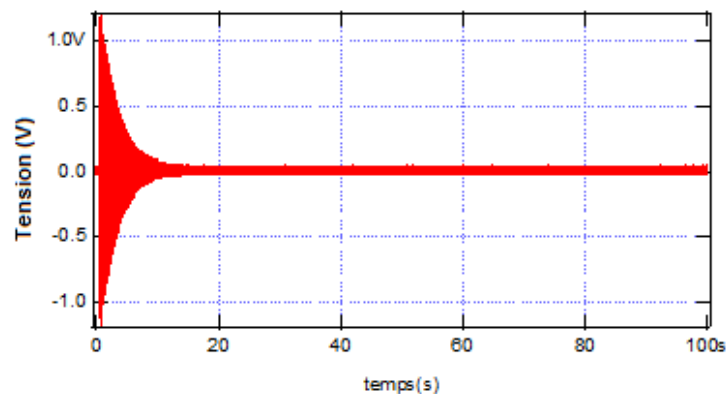
$$N_{\text{maxFFT}} \gg 10000 \quad (3)$$

#### III.3.2. Procédure quand on dispose de la profondeur mémoire nécessaire.

Pour obtenir directement le résultat par transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle, il faut donc disposer d'un oscilloscope avec une profondeur mémoire supérieure à ce que les appareils d'entrée de gamme fournissent (1000 points pour un HP54600, 2500 pour un TDS210, ...). On peut, par exemple utiliser des oscilloscopes DSO5012A (jusqu'à 1Mpts sur une voie) ou DSO6012A (avec l'extension 8M soit jusqu'à 8 Mpts sur une voie). En revanche, on ne pourra pas utiliser leur module FFT, car celui-ci ne travaille qu'avec un sous échantillonnage. On va donc acquérir les données temporelles issues de l'oscilloscope sur un logiciel de traitement de donnée et calculer la FFT sur toute la profondeur mémoire. On perd ainsi l'aspect calcul en « temps réel » du spectre, mais on va gagner en résolution spectrale, car on pourra garder une durée d'acquisition  $T_o$  assez importante (faible pas de calcul du spectre), tout en respectant le critère de Shannon ( $F_{\text{eFFT}}$  assez grand).

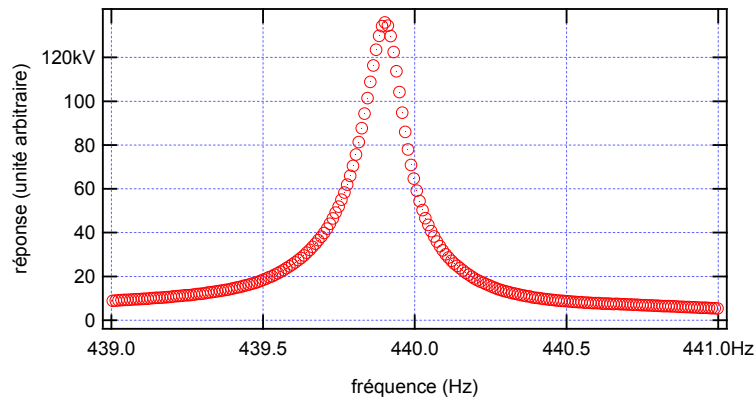
Le choix important à faire, c'est la durée d'acquisition qui conditionne la résolution spectrale. Par exemple, avec un diapason dont le facteur de qualité est 5000, la bande passante  $\Delta f$  autour de 440Hz est de l'ordre de 0,088Hz. Il faut donc un pas de calcul assez inférieur à cette valeur. Si on choisit par exemple un pas de calcul spectral  $\Delta F$  de 0,01Hz, il faudra alors une durée d'acquisition  $T_o$  de 100s. Dans ces conditions, avec une profondeur mémoire de 4Mpts par exemple, on se retrouve avec un fréquence d'échantillonnage  $F_{\text{eFFT}} = F_c$  de 40kHz ce qui ne pose pas de problème pour le critère de Shannon.

La figure suivante présente l'acquisition temporelle de la réponse impulsionnelle et un zoom au voisinage de 440Hz de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du diapason (en échelle linéaire, ce qui ne pose pas de problème ici).



*Remarque :* acquérir sur une durée plus importante permet d'avoir un pas de calcul en fréquence plus faible et donc un pic de résonance décrit par davantage de points. Néanmoins, la réponse impulsionnelle étant décroissante,

pour des acquisitions trop longues, les pseudo-oscillations à 440Hz vont devenir plus faibles que le pas de quantification en tension de l'oscilloscope et les points obtenus dans ces conditions n'apporteront aucune information, un peu comme si on ajoutait des zéros. Les points qui s'ajoutent alors sur la fonction de transfert résonante sont alors davantage assimilables à des points d'interpolation. Ils n'apportent pas une meilleure connaissance du système.



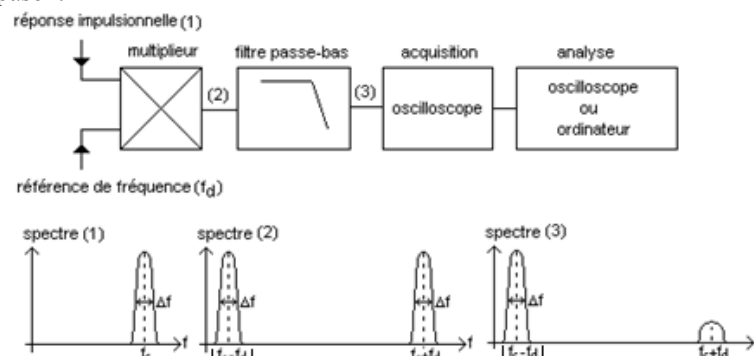
*Remarque :* Ce que l'on relève, c'est la fonction de transfert du diapason avec sa caisse de résonance en cascade avec le microphone.

### III.3.3. Comment faire quand on ne dispose pas d'assez de points ?

Dans le cas où la profondeur mémoire des oscilloscopes disponibles n'est pas suffisante, il existe différentes solutions. On peut réaliser un traitement analogique préalable à l'acquisition, une translation de fréquence. Il est également possible de réaliser numériquement la translation de fréquence en réalisant un sous-échantillonnage judicieux. Dans tous les cas, l'objectif est de diminuer la largeur de la fenêtre à analyser, afin d'obtenir une fréquence d'échantillonnage de travail assez faible ce qui permet d'augmenter la durée d'observation  $T_o$  et donc de diminuer le pas de calcul  $1/T_o$  du spectre.

#### III.3.3.1. Utilisation d'une translation analogique de fréquence puis calcul de la FFT.

Supposons que l'on dispose d'un signal sinusoïdal dont on contrôle précisément la valeur de fréquence notée  $f_d$ . Si on multiplie la réponse impulsionnelle du diapason par la sinusoïde à  $f_d$ , en appelant  $f_c$  la fréquence de résonance du diapason, le spectre du produit présentera un comportement de type passe-bande autour de  $|f_c - f_d|$  et  $f_c + f_d$ . En filtrant avec un filtre passe-bas qui élimine au mieux  $f_c + f_d$ , on trouve la fonction de transfert du diapason traduite en fréquence de  $f_d$  vers la gauche. Il suffit de faire en sorte que  $|f_c - f_d|$  soit beaucoup plus faible que  $f_c + f_d$  afin de rendre le filtrage le plus simple possible à réaliser tout en s'assurant que  $|f_c - f_d| \gg \Delta f$ , bande passante du diapason.



Il ne reste plus qu'à faire l'acquisition du signal en sortie du filtre et à en calculer la transformée de Fourier. Pour que la transformée de Fourier nous convienne, il faut donc que

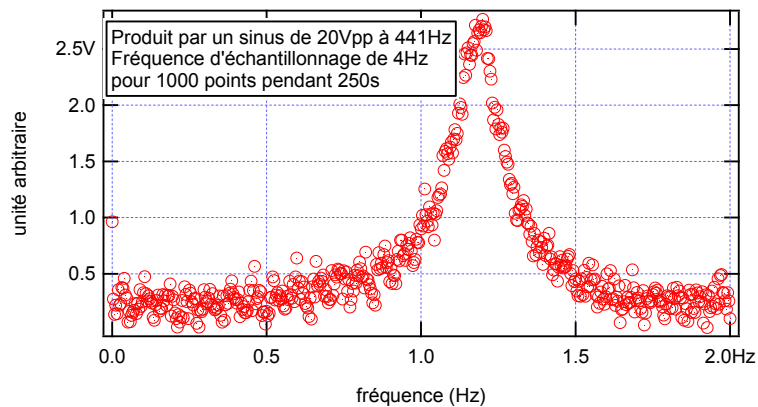
$$\Delta F \ll \Delta f \quad \text{ou encore} \quad 1/T_o \ll f_c/Q \quad (1) \text{ (inchangée)}$$

Par ailleurs, il faut respecter le critère de Shannon, ce qui signifie que le spectre doit être calculé avec

$$F_e/2 > |f_c - f_d| \quad (\text{en fait, un peu plus si on tient compte de la bande passante}) \quad (3)$$

On va donc pouvoir se permettre de travailler avec une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus faible que précédemment. Si on prend  $F_e = 4\text{Hz}$  et  $T_o \gg 10\text{s}$ , il nous faut  $N \gg 40$  points. Cette condition est satisfaite pour tous les oscilloscopes numériques.

Expérimentalement, avec une acquisition de 250s à 4Hz, on récupère 1000 points. Le spectre obtenu a la forme suivante :



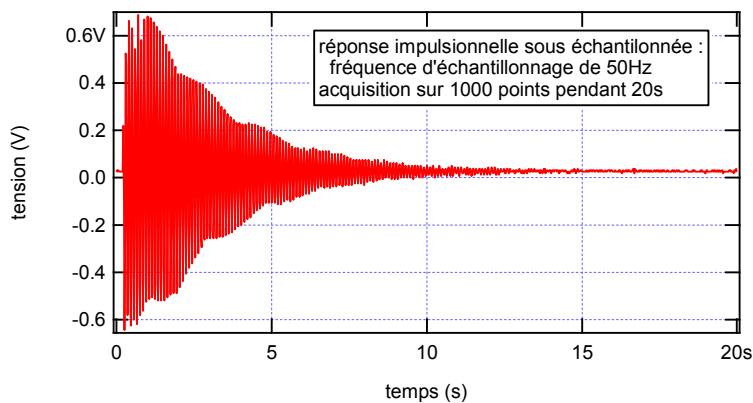
On retrouve un pic voisin de 1,1Hz qui correspond à 441Hz-439.9Hz. Le signal n'est pas de très bonne qualité, notamment en raison des composantes continues résiduelles des circuits électroniques et de l'efficacité médiocre du filtrage.

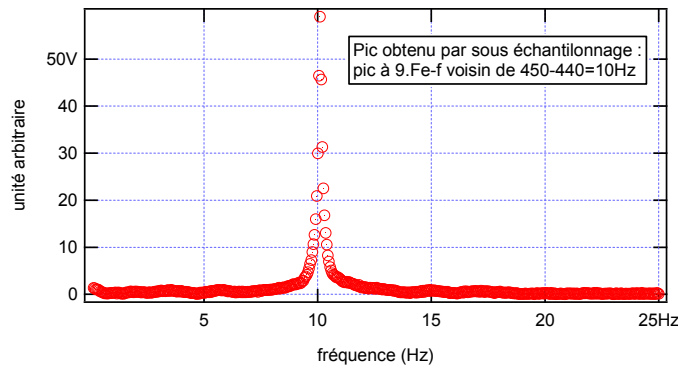
### III.3.3.2. Translation de fréquence par sous échantillonnage.

On récupère la réponse impulsionnelle directement à l'oscilloscope, en travaillant sur une base de temps, qui conduit, sur le module FFT de l'oscilloscope, à une fréquence d'échantillonnage de 50Hz. Cette fréquence est bien inférieure à ce que nous avons indiqué pour le critère de Shannon et nous sommes bien dans des conditions de sous échantillonnage avec repliement de spectre.

Si on dispose d'un oscilloscope qui travaille avec  $N_{FFT}=1000$  et que l'on a une fréquence d'échantillonnage  $F_{eFFT}$  de 50Hz, la base de temps sera  $T_o = 20s$  et le pas de calcul du spectre  $\Delta f=0,05Hz$ . Nous allons observer un pic replié d'ordre 9 à une fréquence voisine de  $9.F_{eFFT}-440Hz=10Hz$  qui tombe bien dans notre plage d'analyse de 25Hz. La largeur du pic  $\Delta f$ , pour un diapason dont le facteur de qualité est de l'ordre de 1000 sera supérieure à  $\Delta F$  ce qui permet d'obtenir quelques points pour représenter la fonction de transfert.

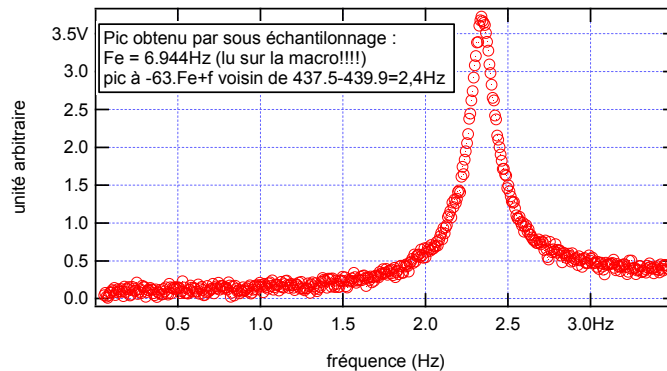
Expérimentalement, pour travailler avec 1000 points sur un DSO5012A ou un DSO6012A, il faut décocher « Max » dans la macro d'acquisition et l'oscilloscope ne travaille alors qu'avec les mêmes données que pour le calcul FFT. Le calcul FFT sera fait sous Igor et non directement à l'oscilloscope pour obtenir une représentation en échelle linéaire qui est plus adaptée ici. En revanche, on activera le module FFT afin de lire directement la fréquence d'échantillonnage utilisée pour arriver à 1000 points (on notera que le spectre calculé présente bien des pics là où on les attend avec le module de l'oscilloscope qui fonctionne bien, mais donne son résultat en échelle log). Avec une fréquence d'échantillonnage de 50Hz, on obtient les résultats suivants :





On pourra ainsi chercher à sous-échantillonner, tant que la fréquence d'échantillonnage sera assez forte pour que la plage d'analyse soit assez grande devant la bande passante du système étudié. Plus le sous-échantillonnage sera fort, plus on disposera d'un nombre de points calculés important dans la bande passante.

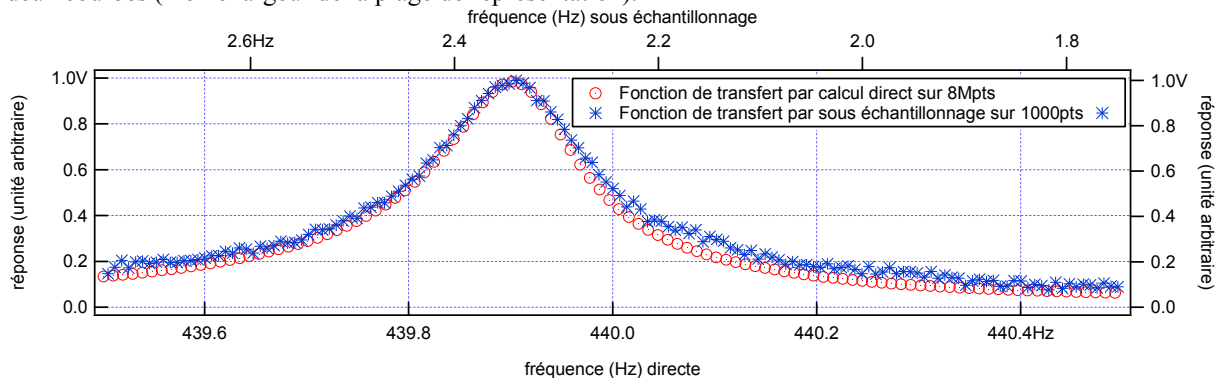
On donne un dernier résultat à  $F_e=6.944\text{Hz}$  (attention, l'oscilloscope affiche, sur le menu FFT une fréquence d'échantillonnage approchée par une valeur entière quand la base de temps est sur un calibre fin. Il faut donc lire la fréquence d'échantillonnage sur la macro Igor qui donne tous les paramètres de l'acquisition dans une fenêtre spéciale). Dans ce cas, il s'agit d'un pic en  $n.F_e+f$  avec  $n$  négatif... Plus on va sous échantillonner, plus il sera compliqué de trouver sur quel pic replié on tombe. Il faut alors connaître assez précisément la fréquence centrale recherchée. Néanmoins, le spectre est calculé, dans ce cas, sur un nombre de point voisin de ce qu'on avait obtenu en travaillant sur toute la profondeur mémoire.



**Remarque importante: énoncé plus subtil du critère de Shannon**

Pour ne pas avoir de problème avec le repliement de spectre, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la largeur du spectre à analyser. Ainsi, si le spectre que l'on étudie est très étroit comme dans le cas du diapason, le critère de Shannon nous indique qu'il faut une fréquence d'échantillonnage supérieure à  $2 \times \Delta f$  et non pas supérieure à  $2 \times 440\text{Hz}$ . Evidemment, pour une fréquence d'échantillonnage de 50Hz et donc une plage d'analyse de 25Hz, le pic n'apparaîtra pas à 440Hz, mais à  $9.F_{\text{eFFT}}-440\text{Hz}=10\text{Hz}$ . La mesure précise de la fréquence centrale du pic permet donc de recalculer précisément la fréquence centrale du diapason si on fait confiance à la fréquence  $F_{\text{eFFT}}$  de l'appareil.

A titre indicatif, on peut comparer les fonctions de transfert obtenues par un calcul de fonction de transfert direct à partir d'une acquisition sur 8 Mpts et une acquisition sur 1000 points avec un sous échantillonnage. On a fait en sorte de prendre des échelles en amplitude adaptées, et de prendre une échelle de fréquence identique pour les deux courbes (même largeur de la plage de représentation).



Les deux courbes ont les mêmes caractéristiques. Seule la fréquence centrale change. Sur la première courbe, la lecture est directe. Sur la seconde, il faut la recalculer. On trouverait donc bien le même facteur de qualité par les deux approches. Même si on dispose d'un appareil qui travaille sur une forte profondeur mémoire, travailler sur 1000 points peut être intéressant pour limiter le temps de calcul et la place mémoire nécessaire. Cependant, la contrainte sur la durée d'acquisition reste et cette durée restera un handicap pour obtenir un résultat rapide.

#### **IV. Amélioration de la résolution de l'analyse spectrale par sous-échantillonnage.**

Nous venons de voir au paragraphe précédent, que l'on pouvait translater un spectre en sous échantillonnant afin d'augmenter le nombre de point calculés dans la zone de réponse étudiée.

On peut utiliser cette astuce afin d'améliorer la résolution d'une analyse spectrale. Nous allons illustrer cette question en étudiant le spectre d'un signal modulé en fréquence dans des conditions de résolution assez délicates. Nous en profiterons pour préciser le critère de Shannon dans de telles situations.

##### **IV.1. Position du problème.**

Si nous prenons une porteuse sinusoïdale de fréquence  $f_p$  avec une modulante également sinusoïdale de fréquence  $f_m$ , dont l'amplitude conduit à une profondeur de modulation  $\Delta f$ , le spectre occupe une plage spectrale de largeur voisine de  $2 \cdot (\Delta f + f_m)$  centrée sur  $f_p$  (bande de Carson). Le spectre est un spectre de raies et ces dernières, sont espacées de proche en proche de  $f_m$ , autour de  $f_p$ .

En prenant une fréquence porteuse  $f_p$  de 100 kHz et une fréquence modulante  $f_m$  de 100 Hz pour une profondeur de modulation de 1 kHz, on s'attend à avoir un spectre dont la puissance est répartie essentiellement sur une bande de 2,4 kHz de large centrée sur 100 kHz avec des pics distants de 100 Hz de proche en proche.

Avec un oscilloscope calculant la FFT sur 1000 points temporels (type DSO5012 ou DSO6012), si on veut respecter le critère de Shannon comme il a été défini jusqu'à présent, il faut une fréquence d'échantillonnage voisine de 250 kHz pour avoir une plage d'analyse FFT de 125 kHz. Dans ces conditions, la base de temps est alors à 400µs/carreau soit  $T_o = 4$  ms de durée d'observation.

Dans ce contexte, le pas de calcul du spectre est de 250Hz, c'est-à-dire supérieur à l'écart de 100Hz entre deux pics successifs. Nous n'avons pas alors la résolution pour analyser correctement le signal.

Si on décide de sous échantillonner et de travailler, vis-à-vis de la FFT à une fréquence d'échantillonnage de 23,3kSa/s (pour ça, ajuster la base de temps en l'augmentant en ayant choisi un réglage fin), on analyse sur une plage de fréquence de 11,65 kHz et on observe sur cette plage un spectre qui a l'allure attendue avec des raies distinctes, séparées de 100Hz de proche en proche et occupant une bande dont la largeur est d'un peu plus de 2kHz. Néanmoins, ce spectre n'est plus centré sur 100 kHz mais 7 kHz environ. Il s'agit d'un repliement d'ordre -4. On observe le spectre replié centré sur  $-4 \cdot f_c + f_p \approx -4 \cdot 23,3 + 100 \approx 7$  kHz.

##### **IV.2. Réalisation de l'analyse spectrale.**

On réalise le signal modulé avec un générateur Agilent 33220 avec les caractéristiques définies précédemment.

On utilise la FFT d'un oscilloscope Agilent DSO5012 ou DSO6012 en demandant un réglage fin de la base de temps pour modifier finement la fréquence d'échantillonnage en vue de la FFT. En plaçant la fréquence d'échantillonnage observable sur le menu de FFT à 23,3 kSa/s, on observe bien le spectre désiré.

##### **IV.3. Redéfinition du critère de Shannon.**

Dans un contexte dans lequel on travaille avec des spectres situés sur des fréquences élevées connues mais occupant une bande étroite, on peut redéfinir le critère de Shannon de la façon suivante :

**Le repliement de spectre peut ne pas affecter le spectre calculé quand la fréquence d'échantillonnage est deux fois supérieure à la largeur spectrale du spectre du signal étudié.**

On perd en revanche la valeur de la fréquence centrale du spectre. Cependant, si on connaît approximativement cette valeur et que l'on connaît précisément la fréquence d'échantillonnage utilisée et que l'on mesure précisément

la fréquence centrale observée, on peut recalculer la valeur de la fréquence centrale du spectre recherché et donc redéfinir toutes les fréquences autour.

On gagne ainsi en résolution au prix d'une durée d'acquisition plus longue et donc au prix d'une plus grande durée nécessaire à l'obtention du spectre. C'est une constatation générale en analyse spectrale : le gain en résolution se paie en temps nécessaire à l'obtention du spectre. On rencontre d'ailleurs le même problème en analyse de spectre à balayage, c'est-à-dire sur des systèmes analogiques n'ayant rien à voir avec le numérique et la FFT. Sur ces appareils, le problème vient de la bande passante du filtre. Quand cette dernière diminue, le temps de réponse du filtre passe-bande augmente. Il devient donc plus lent et il faut balayer moins vite ce qui veut dire que le spectre est plus long à obtenir. Mais cette diminution de la bande passante permet d'avoir des spectres plus fins et donc une meilleure résolution.

Version juillet 2019



## Annexe : Effets de la numérisation

Dans cette annexe, nous allons utiliser un programme en python qui permet de représenter les effets d'une échelle inadaptée pour numériser et de caractériser le bruit de quantification. Le programme permet en outre de voir l'effet d'un bruit gaussien sur le signal numérisé, mais nous n'utiliserons pas cette option dans cette annexe.

On travaille avec un signal sinusoïdal  $s(t)$  dont on peut modifier la valeur efficace. On peut également modifier les paramètres de numérisation (dynamique en amplitude, nombre de bits, pas d'échantillonnage).

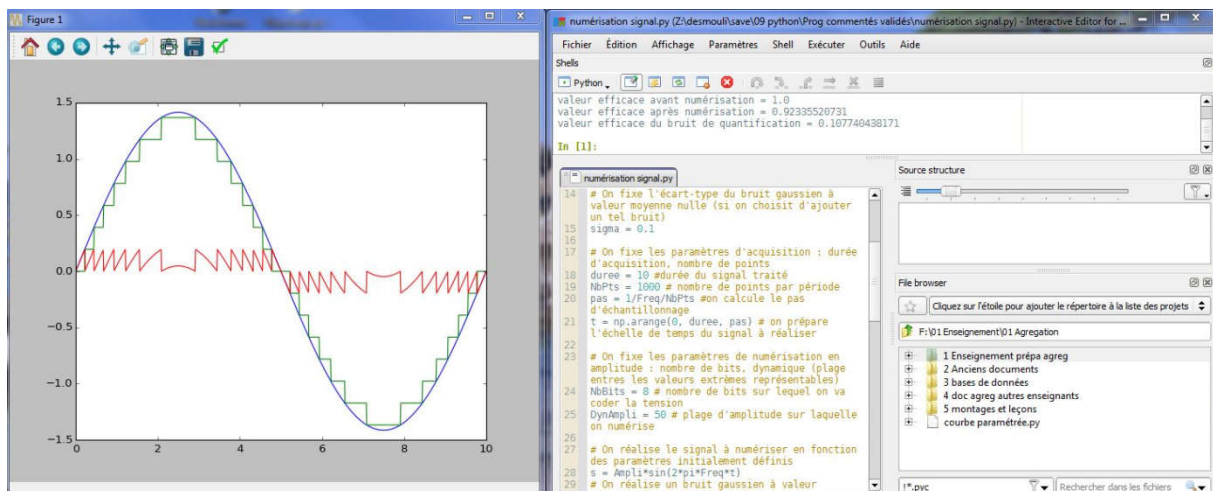
Ce signal sera appelé « signal » dans le programme.

En décommentant sur la fin d'une ligne ou « signal » est défini, on peut ajouter un bruit gaussien à valeur moyenne nulle dont la valeur efficace (écart-type des échantillons) est réglable.

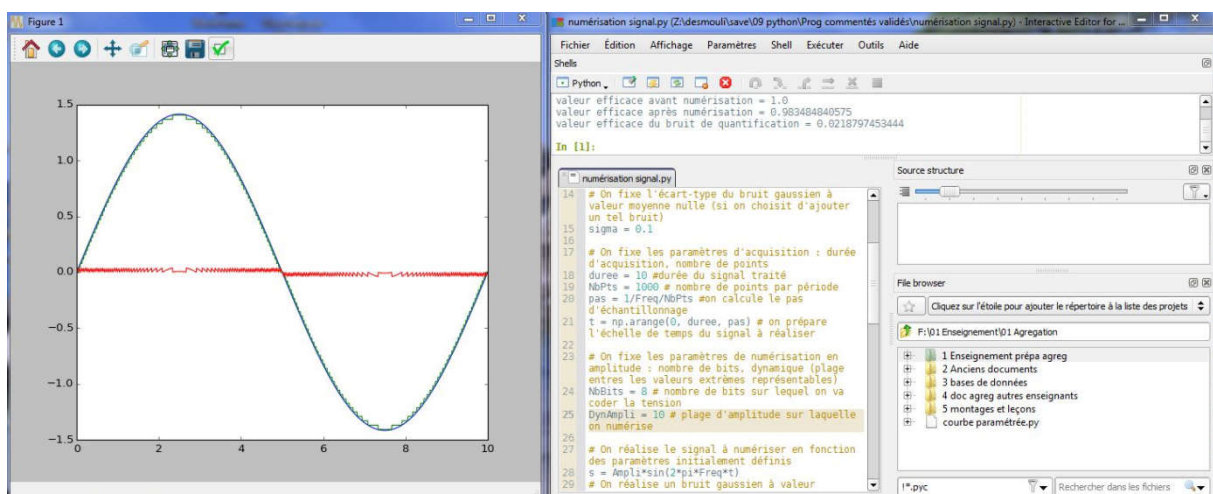
Le programme affiche le signal non numérisé, le signal numérisé et le bruit de quantification (différence entre les deux signaux précédents) dans la fenêtre principale. Dans la fenêtre de commande, le programme affiche la valeur efficace avant et après numérisation, ainsi que la valeur efficace du bruit de quantification.

Pour quantifier le signal, on récupère le pas de quantification inférieur à la valeur réelle quand le signal est supérieur à sa valeur moyenne et le pas de quantification supérieur quand le signal est inférieur à sa valeur moyenne. La façon de numériser choisie conduit à systématiquement sous-estimer la valeur efficace quand on numérise.

Dans le cas d'une sinusoïde de 1V efficace, sans bruit, numérisée sur 8 bits avec une dynamique de 50V (5V par carreaux sur 10 carreaux par exemple), on obtient le résultat suivant :



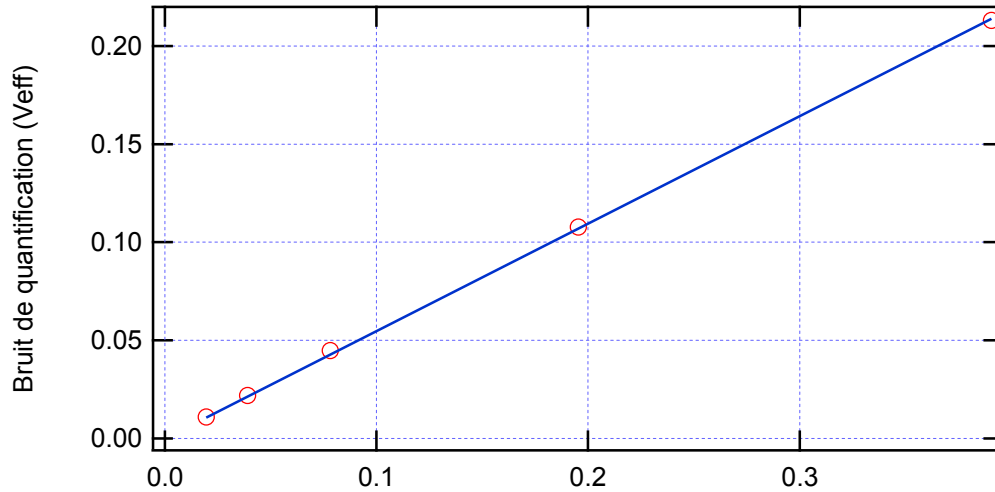
Dans le cas d'une sinusoïde de 1V efficace, sans bruit, numérisée sur 8 bits avec une dynamique de 10V (1V par carreaux sur 10 carreaux par exemple), on obtient le résultat suivant :





Dans le deuxième cas, le fait d'utiliser davantage de niveaux de quantification permet d'avoir une représentation plus fidèle. Il en résulte notamment une valeur efficace du signal numérisé plus proche du signal non numérisé.

remarque : Dans les conditions de numérisation choisies, si on étudie l'évolution de la valeur efficace du bruit de quantification en fonction du pas de quantification, on obtient l'allure suivante :



pas de quantification = dynamique/256 (en V)

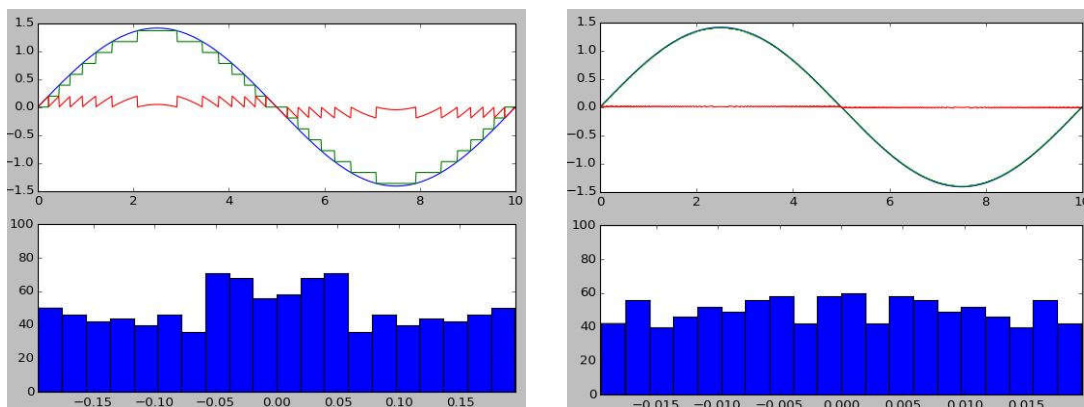
Si, en première approximation, on suppose l'erreur uniformément distribuée entre  $-q$  et  $q$  (si  $q$  est le pas de quantification en tension égal à la dynamique divisée par  $2^n$ ), on peut écrire que

$$b_{qeff}^2 = \int_{-q}^q b_q^2 \cdot \frac{db_q}{2 \cdot q} = \frac{q^2}{3}$$

On arrive donc à

$$b_{qeff} = \frac{q}{\sqrt{3}}$$

On vérifie bien sur la courbe suivante que la pente est proche de 0,57. Ce n'est néanmoins pas exactement le résultat obtenu car la distribution de l'erreur n'est pas strictement uniforme entre  $-q$  et  $q$ . Pour une sinusoïde, on représente sur les deux figures suivantes la distribution de l'erreur en fonction de la dynamique de numérisation, avec à gauche une dynamique de 50V et à droite une dynamique de 5V.



Plus la dynamique est forte, c'est-à-dire moins on numérise correctement, moins la distribution ressemble à une distribution uniforme

La distribution dépend par ailleurs de la forme du signal numérisé. Pour une sinusoïde, l'écart à la distribution uniforme est faible. Pour des signaux aléatoires, il peut être beaucoup plus important et l'hypothèse de la distribution uniforme n'est alors plus valable.