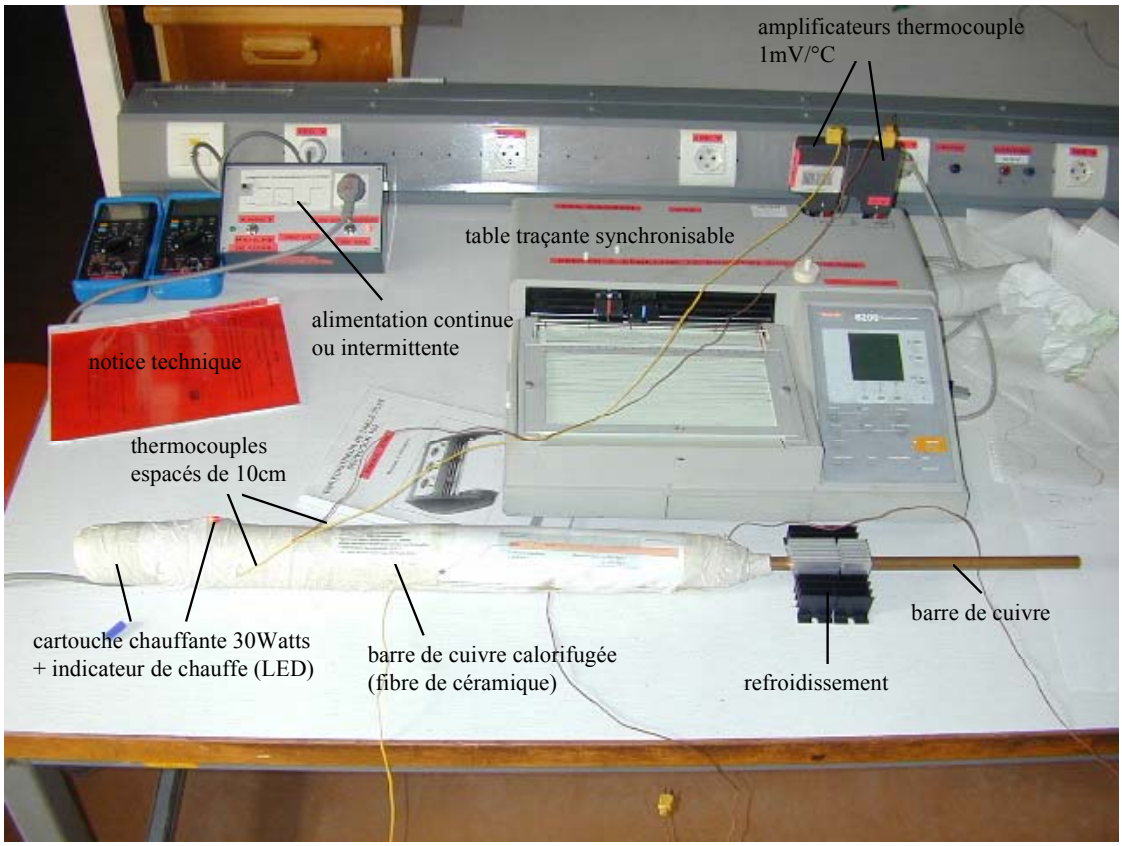
Transfert thermique dans une barre calorifugée

But

- Mesure de la conductivité thermique du cuivre λ par une méthode "d'onde thermique".
- Point fort de cette méthode : grâce une mesure de la variation temporelle des températures $T_i(t)$ en deux points donnés de la barre, on détermine la conductivité thermique sans avoir besoin de négliger les pertes latérales, ni même de les évaluer (on pourrait éventuellement évaluer ces pertes grâce aux courbes obtenues)

Description du matériel

On dispose d'une barre de cuivre pur de rayon r= 7,5mm et de longueur L=1m, que l'on a calorifugé à l'aide d'un matériau à base de fibre de céramique (sans amiante) et où l'on a implanté, tous les 10 cm, 4 thermocouples de type K(Ni-Cr; Ni-Al). Le système de chauffage est basé sur une résistance chauffante électrique implantée au centre de la barre (puissance 30 Watts). Les thermocouples reliés à une table traçante permettent une mesure de la variation temporelle des températures $T_i(t)$ en différents points de la barre.



Caractéristiques du Cuivre : Masse volumique : $\rho = 8950\ kg/m^3$

Chaleur spécifique (voir tables) : $C_{p20°C} = 0{,}092\ Cal/g.K = 385\ J/kg.K$

Conductivité thermique (voir tables) : $\lambda_{350K} = 394\ Wm^{-1}\ K^{-1}$

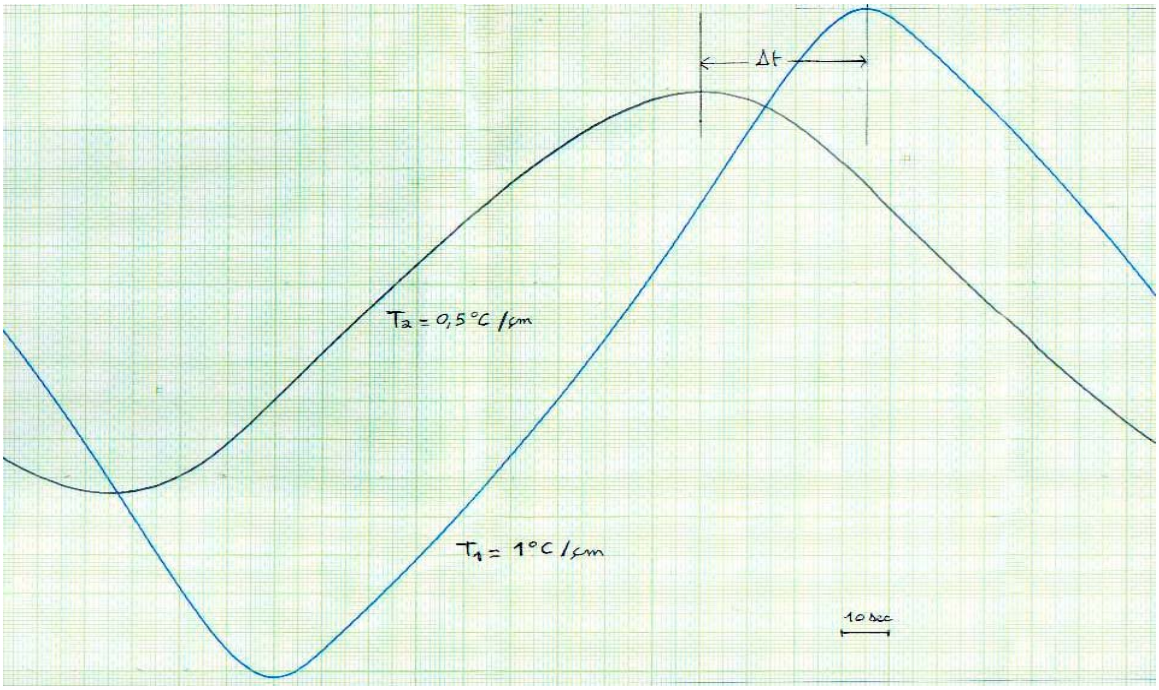
Expérience

Système d'acquisition :

2 températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sont tracées grâce à une table traçante. La table traçante que nous utilisons ici permet d'obtenir les deux voies simultanément sans déphasage artificiel introduit par le décalage mécanique des deux plumes (nous utilisons ici une table numérique SEFRAM 8200 avec une fonction → "SYNCHRO"). Si tel n'est pas le cas, il faut alors tenir compte de ce décalage pour la détermination du déphasage temporelle lié à la propagation de l'onde thermique.

2 amplificateurs de thermocouple (80 TK dans la grande boite de thermomètres et sondes en salle de thermo) permettent d'amplifier le signal du thermocouple avec en sortie 1mV/°C (à brancher directement sur la table traçante avec deux multimètres en parallèle pour vérifier la température).

Nous obtenons le tracé suivant :



Sur deux thermocouples placés en x_1 et x_2 on a (voir partie théorique) :

$$\begin{cases} T_1(x_1,t)=Ae^{-\nu x_1}\sin(\omega t-\mu x_1)+B_1 \\ T_2(x_2,t)=Ae^{-\nu x_2}\sin(\omega t-\mu x_2)+B_2 \end{cases}$$

On en tire ν par le rapport d'amplitude maximum : $\nu=\dfrac{ln(\Delta T_{1max}/\Delta T_{2max})}{x_2-x_1}$

et μ par le déphasage : $\mu=\dfrac{\omega\Delta t}{x_2-x_1}$

la conductivité réelle du cuivre est alors donnée par la formule :

$$\lambda = \frac{\omega \rho C_p}{2\mu\nu} \qquad \left(\lambda = \frac{\rho C_p (x_2 - x_1)^2}{2\Delta t \ln(\Delta T_{1max} / \Delta T_{2max})} \right)$$

L'analyse des deux courbes ci-dessus donne :

$\Delta T_{1max} = (17{,}2 \pm 0{,}2)°C \qquad \Delta T_{2max} = (5{,}2 \pm 0{,}2)°C$

$\Delta t = (35 \pm 2)s \qquad T = 248s$

On en déduit: $\mu = 8{,}9 \pm 0{,}5 \qquad \nu = 12 \pm 0{,}5$

d'où la conductivité du cuivre : $\lambda = (411 \pm 40) Wm^{-1}K^{-1}$

Ce résultat est obtenu avec une précision relative proche de 10%. La valeur tabulée est $\lambda_{table350K} = 394 Wm^{-1}K^{-1}$

Etude Théorique

Soit T(x,t) la température de la barre à un instant donné en un point x de l'axe Ox de cette barre, on modélise les pertes radiales par une densité de flux thermique de la forme :

$$j_p = h(T-T_a)$$

où h est le coefficient d'échange thermique entre la barre et le milieu extérieur à la température ambiante T_a (température de la salle considérée comme constante).

Un bilan thermique nous donne l'équation différentielle pour T(x,t) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h(T - T_a)}{\lambda} \frac{2}{r} = \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

où λ est le coefficient de conductivité thermique donné par la loi de Fourier à une dimension :

$$j_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

1) Régime stationnaire sans pertes : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et $j_p = 0$

La cartouche chauffante est alimentée en "continu" par du 220 Volts.

L'équation à résoudre est : $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ qui a pour solution une loi linéaire en x :

$$T(x) = -\frac{j_x}{\lambda} x + T_0$$

Une exploitation graphique adéquate permet de donner une estimation de la conductivité λ. La densité de flux thermique j_x peut être estimée facilement à partir de la puissance fournie par la cartouche chauffante, ou plus difficilement par la quantité de chaleur évacuée à l'extrémité de la barre. Négliger les pertes conduit ici à surestimer λ.

2) Régime dépendant du temps ($\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$). *Propagation d'une onde thermique sinusoïdale.*

La cartouche chauffante est alimentée cette fois-ci par intermittence en 220 Volts. La fonction créneaux correspondante est décomposable en série de Fourier, dont nous ne garderons que le terme fondamental. Dès le premier thermocouple, que l'on prendra comme origine des x, la température suit en effet pratiquement une loi sinusoïdale du type :

$$T_1(x=0,t) = T_{01}\sin(\omega t) + T_0$$

(Nous nous plaçons dans le régime permanent, obtenu généralement après une ou deux heures de chauffage).

L'équation à résoudre est : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h(T-T_a)}{\lambda}\frac{2}{r} = \frac{\rho C_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$

En régime permanent, on prendra une solution de type onde thermique se propageant suivant Ox : $T(x,t) = \Re e\left\{\underline{A}e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\right\} + B$ avec $\underline{k}$ à priori complexe que l'on remplace dans l'équation différentielle pour obtenir : $\underline{k}^2 = -\frac{2h}{\lambda r} - i\frac{\omega\rho C_p}{\lambda}$

en posant $\underline{k} = \mu - i\nu$ on obtient les relations :

$$\begin{cases} \nu^2 - \mu^2 = \dfrac{2h}{\lambda r} \\ \nu\mu = \dfrac{\omega\rho C_p}{2\lambda} \end{cases} \qquad \text{ainsi que} \qquad T(x,t) = Ae^{-\nu x}\sin(\omega t - \mu x) + B$$

(si l'on avait négligé les pertes nous aurions obtenu les mêmes formules avec $\mu = \nu$)

Les coefficients μ et ν peuvent être déterminés expérimentalement. Ils sont reliés à la conductivité réelle du cuivre : $\lambda = \frac{\omega\rho C_p}{2\mu\nu}$

ainsi qu'au coefficient d'échange thermique (pertes) : $h = \frac{\omega\rho r C_p}{4}\left(\frac{\nu}{\mu} - \frac{\mu}{\nu}\right)$

Sur deux thermocouples placés en x_1 et x_2 on a :

$$\begin{cases} T_1(x_1,t)=Ae^{-\nu x_1}\sin(\omega t-\mu x_1)+B_1 \\ T_2(x_2,t)=Ae^{-\nu x_2}\sin(\omega t-\mu x_2)+B_2 \end{cases}$$

On en tire ν par le rapport d'amplitude maximum : $\nu=\frac{ln(\Delta T_{1max}/\Delta T_{2max})}{x_2-x_1}$ avec ΔT_{max} l'amplitude maximum de la température.

et μ par le déphasage : $\mu=\frac{\omega\Delta t}{x_2-x_1}$